1. *Rappels de 6e : multiples, diviseurs, critères par 2, 5 et 10*

Ex. 1 ★☆☆ Automatismes : le chiffre des unités

(a) Non : son chiffre des unités est 5, pas 0. Il est divisible par 5, mais pas par 10.

(b) Non : c'est le chiffre des unités qui compte, et ici c'est 7. 6 027 est impair.

(c) Non : son chiffre des unités est 4, pas 0. Un nombre peut être divisible par 2 sans l'être par 10.

(d) 5 190 (chiffre des unités 0) et 47 305 (chiffre des unités 5). 812 et 60 001 ne le sont pas.

(e) Le reste vaut 8, c'est le chiffre des unités : $93\,068 = 10 \times 9\,306 + 8$.

(f) Oui : son chiffre des unités est 0, donc il est divisible par 2, par 5 et par 10.

Ex. 2 ★☆☆ Automatismes : multiple ou diviseur ?

(a) Faux : $91 = 7 \times 13$, donc 91 est un multiple de 7, et 7 est un diviseur de 91
(et pas l'inverse).

(b) Vrai : $0 = 23 \times 0$. 0 est un multiple de tous les nombres.

(c) Vrai : $5\,873 = 1 \times 5\,873$. 1 est un diviseur de tous les nombres.

(d) Vrai : $17 = 17 \times 1$. Tout nombre est un multiple de lui-même.

(e) Faux : $12 = 48 \times 0 + 12$, le reste vaut 12 et pas 0. C'est l'inverse : $48 = 12 \times 4$, donc 48 est divisible par 12.

(f) Vrai : $98 = 14 \times 7$, le reste vaut 0.

Ex. 3 ★☆☆ La division euclidienne

(a) $168 = 7 \times 24$, le reste vaut 0 : 168 est divisible par 7.

(b) $250 = 9 \times 27 + 7$: le reste vaut 7, pas 0, donc 250 n'est pas un multiple de 9.

(c) $204 = 12 \times 17$, le reste vaut 0 : 12 est un diviseur de 204.

(d) $359 = 13 \times 27 + 8$: le quotient est 27 et le reste vaut 8, il n'est pas nul. 359 n'est pas divisible par 13.

(e) Le reste est toujours plus petit que le diviseur, donc le plus grand reste possible est 8.

Ex. 4 ★★☆ Chiffres manquants

(a) Le chiffre des unités doit être 0 ou 5 : $\square = 0$ ou $\square = 5$, ce qui donne 470 et 475.

(b) Le chiffre des unités est 8, quel que soit $\square$: le nombre est toujours pair. Les 10 chiffres de 0 à 9 conviennent.

(c) Pour 5, $\square$ vaut 0 ou 5 ; pour 2, $\square$ est pair. Seul 0 convient : 810.

(d) Aucune valeur ne convient : le chiffre des unités est 5, pas 0. Quel que soit $\square$, le nombre n'est pas divisible par 10.

(e) $\square$ est pair mais différent de 0 : $\square = 2$, 4, 6 ou 8, ce qui donne 2 942 ; 2 944 ; 2 946 ; 2 948.

Ex. 5 ★★☆ Les boîtes d'œufs d'Inès

(a) Non : 245 se termine par 5, pas par 0, donc 245 n'est pas divisible par 10.

(b) Oui : 245 se termine par 5, donc il est divisible par 5. $245 = 5 \times 49$: il lui faut 49 boîtes.

(c) $245 = 12 \times 20 + 5$: elle remplit 20 boîtes et il reste 5 œufs.

(d) Le multiple de 12 qui suit 240 est $252 = 12 \times 21$. Elle doit ramasser $252 - 245 = 7$ œufs de plus.

Ex. 6 ★★★ Le carnet d'Elio

(a) Faux. L'égalité est juste, mais le reste doit être plus petit que le diviseur 8, et 11 ne l'est pas. On peut encore placer un 8 : $347 = 8 \times 43 + 3$. Le reste est 3.

(b) Faux. $4\,017 \times 5 = 20\,085$. Son chiffre des unités est 5, pas 0 : ce nombre est un multiple de 5, mais il n'est pas divisible par 10.

(c) Faux. Contre-exemple : 13 et 27 sont impairs, mais $13 + 27 = 40$. Son chiffre des unités, 0, est pair, donc 40 est pair.

(d) Vrai. $0 = 6 \times 0$, donc 0 est un multiple de 6 et 6 est un diviseur de 0. Mais 0 multiplié par n'importe quel nombre donne 0, jamais 6 : 0 n'est pas un diviseur de 6.

(e) Vrai. $1\,000 = 7 \times 142 + 6$, et $7 \times 142 = 994$.
Donc 994 est un multiple de 7, et 7 est un diviseur de 994.

Ex. 7 ★★★ **Le nombre mystère de Ben**

(a) Pour être divisible par 5, il faut que le chiffre des unités soit 0 ou 5. Pour être divisible par 2, il faut qu'il soit pair. Seul 0 remplit les deux conditions, donc le chiffre des unités est 0.

(b) Le chiffre des dizaines peut prendre n'importe quelle valeur de 0 à 9. Les nombres qui conviennent sont : 700 ; 710 ; 720 ; 730 ; 740 ; 750 ; 760 ; 770 ; 780 ; 790. Il y en a 10.

(c) Non. Un nombre divisible par 2 et par 5 a 0 pour chiffre des unités, donc il est forcément divisible par 10. Avec la condition de Lina, aucun nombre ne convient.

(d) $710 = 7 \times 101 + 3$; $720 = 7 \times 102 + 6$; $730 = 7 \times 104 + 2$; $740 = 7 \times 105 + 5$; $750 = 7 \times 107 + 1$; $760 = 7 \times 108 + 4$; $770 = 7 \times 110$ (reste 0) ; $780 = 7 \times 111 + 3$; $790 = 7 \times 112 + 6$. Le nombre $700 = 7 \times 100$ est exclu, car son chiffre des dizaines est 0. Le nombre mystère est donc 770.

(e) On a $770 = 7 \times 110$.
Donc 770 est un multiple de 7, et 7 est un diviseur de 770.

Ex. 8 ★★★ **Le tableau de Yanis**

(a) Le chiffre des unités est 5. Il est impair, donc le nombre n'est pas divisible par 2 : « non » est juste. Il vaut 5, donc le nombre est divisible par 5 : « oui » est juste. Il n'est pas 0, donc le nombre n'est pas divisible par 10 : il faut corriger « oui » en « non ».

(b) C'est le chiffre des unités qui compte, pas le premier chiffre. Le chiffre des unités de 860 121 est 1 : il est impair, donc le nombre est impair. Il faut corriger « oui » en « non » dans la colonne « Par 2 ? ».

(c) Non. 37 418 est bien divisible par 2, car son chiffre des unités, 8, est pair. Mais ce chiffre n'est pas 0, donc le nombre n'est pas divisible par 10. Il faut corriger « oui » en « non » dans la colonne « Par 10 ? ».

(d) Non. On a $0 = 2 \times 0$, $0 = 5 \times 0$ et $0 = 10 \times 0$: 0 est un multiple de tout nombre. La ligne de 0 doit contenir « oui » dans les trois colonnes.

(e) Par exemple 413 975 : son chiffre des unités, 5, est impair (pas divisible par 2), vaut 5 (divisible par 5) et n'est pas 0 (pas divisible par 10). Par exemple 250 746 : son chiffre des unités, 6, est pair, mais ce n'est ni 0 ni 5 : divisible par 2, mais ni par 5 ni par 10.

2. *Liste de tous les diviseurs d'un nombre*

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : compléter les produits**

(a) $56 = 4 \times 14$

(b) $56 = 7 \times 8$

(c) $108 = 9 \times 12$

(d) $105 = 7 \times 15$

(e) $49 = 7 \times 7$: ici, 7 ne donne qu'un seul diviseur.

(f) $63 = 7 \times 9$

Ex. 10 ★☆☆ **Automatismes : est-ce un diviseur ?**

(a) Non : 95 est impair, il n'a donc aucun diviseur pair ($95 = 4 \times 23 + 3$).

(b) Oui : $119 = 7 \times 17$, le reste est 0. Il n'y a pas de critère pour 7 : il faut faire la division.

(c) Oui : la somme des chiffres vaut $5 + 7 = 12$, qui est dans la table de 3
($57 = 3 \times 19$).

(d) Non : la somme des chiffres vaut $7 + 4 = 11$, qui n'est pas dans la table de 9.

(e) Non : 68 ne se termine ni par 0 ni par 5.

(f) Oui : $98 = 7 \times 14$, le reste est 0.

Ex. 11 ★★☆ **Trois listes de diviseurs**

(a) $64 = 1 \times 64 = 2 \times 32 = 4 \times 16 = 8 \times 8$. 3 ne convient pas ($6 + 4 = 10$), 5 non plus, 6 et 7 non plus ($64 = 7 \times 9 + 1$). Diviseurs de 64 : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64.

(b) $75 = 1 \times 75 = 3 \times 25 = 5 \times 15$ ($7 + 5 = 12$ est dans la table de 3). 75 est impair : aucun diviseur pair. 7 ne convient pas ($75 = 7 \times 10 + 5$). On s'arrête, car $9 \times 9 = 81$ dépasse 75. Diviseurs de 75 : 1 ; 3 ; 5 ; 15 ; 25 ; 75.

(c) $53 = 1 \times 53$. Il est impair. 3 ne convient pas ($5 + 3 = 8$), 5 non plus, 7 non plus ($53 = 7 \times 7 + 4$). On s'arrête, car $8 \times 8 = 64$ dépasse 53. 53 n'a que deux diviseurs : 1 ; 53.

(d) 64 a 7 diviseurs (8 ne compte qu'une fois), 75 en a 6 et 53 en a 2. C'est 64 qui en a le plus : 7 diviseurs.

Ex. 12 ★★☆ **Les listes de Léna et de Hugo**

(a) Elle a oublié 1 et 72 ($72 = 1 \times 72$), puis 8 et 9 ($72 = 8 \times 9$) : elle s'est arrêtée trop tôt.

(b) $72 = 1 \times 72 = 2 \times 36 = 3 \times 24 = 4 \times 18 = 6 \times 12 = 8 \times 9$ (5 et 7 ne conviennent pas). Diviseurs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 18 ; 24 ; 36 ; 72. Il y en a 12.

(c) Hugo a écrit 9 deux fois. Or $81 = 9 \times 9$ ne donne qu'un seul diviseur : on écrit 9 une seule fois.

(d) $81 = 1 \times 81 = 3 \times 27 = 9 \times 9$. 81 est impair : aucun diviseur pair. Il se termine par 1 : pas 5. $81 = 7 \times 11 + 4$: pas 7. Comme $9 \times 9 = 81$, on s'arrête à 9. Hugo n'a rien oublié : 81 a 5 diviseurs, 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81.

Ex. 13 ★★☆ **Les chaises de la salle des fêtes**

(a) $96 = 1 \times 96 = 2 \times 48 = 3 \times 32 = 4 \times 24 = 6 \times 16 = 8 \times 12$. 5, 7, 9, 10 et 11 ne conviennent pas. Diviseurs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 32 ; 48 ; 96.

(b) Non : il faudrait un nombre qui, multiplié par lui-même, donne 96. Or $9 \times 9 = 81$ et $10 \times 10 = 100$. Aucune paire de produits égaux à 96 n'a deux facteurs égaux.

(c) On enlève 1 et 96 des 12 diviseurs : il reste 10 nombres de rangées possibles. Samir a donc 10 rangements.

(d) 5 ne convient pas (96 ne se termine ni par 0 ni par 5), 9 non plus ($9 + 6 = 15$), 7 et 10 non plus. Il peut faire 6 rangées de 16 chaises ou 8 rangées de 12 chaises.

Ex. 14 ★★★ **Le défi d'Inès : deux diviseurs seulement ?**

(a) Non. Il n'y a pas de critère pour 7, il faut poser la division : $91 = 7 \times 13$, reste 0.
Donc 7 est un diviseur de 91 : Inès a tort.

(b) $91 = 1 \times 91 = 7 \times 13$. 91 est impair : 2, 4, 6, 8, 10, 12 ne conviennent pas. La somme des chiffres vaut 10, qui n'est pas dans la table de 3 : ni 3 ni 9. 91 ne se termine ni par 0 ni par 5 : pas 5. $91 = 11 \times 8 + 3$: pas 11. Ensuite on retombe sur 13, déjà trouvé. Diviseurs de 91 : 1 ; 7 ; 13 ; 91. Il y en a 4.

(c) $77 = 7 \times 11$, reste 0 : 7 est un diviseur de 77. Pour 87, la somme des chiffres vaut 15, qui est dans la table de 3 : $87 = 3 \times 29$. Pour 79 : il est impair, donc aucun nombre pair ne le divise ; la somme des chiffres vaut 16, qui n'est pas dans la table de 3 : ni 3 ni 9 ; il se termine par 9 : pas 5 ; $79 = 7 \times 11 + 2$: pas 7. Comme $9 \times 9 = 81$ dépasse 79, on s'arrête. C'est donc 79 qui n'a que deux diviseurs : 1 et 79.

Ex. 14 **(suite)**

(d) 99 : la somme des chiffres vaut 18, qui est dans la table de 3, donc 3 le divise. 98 est pair, donc 2 le divise. 97 est impair ; la somme des chiffres vaut 16 : ni 3 ni 9 ; il se termine par 7 : pas 5 ; $97 = 7 \times 13 + 6$: pas 7. Comme $10 \times 10 = 100$ dépasse 97, on s'arrête. Le nombre cherché est 97 : ses seuls diviseurs sont 1 et 97.

Ex. 15 ★★★ **Un nombre pair de diviseurs ?**

(a) $90 = 1 \times 90 = 2 \times 45 = 3 \times 30 = 5 \times 18 = 6 \times 15 = 9 \times 10$. 4 ne convient pas : $90 = 4 \times 22 + 2$. 7 non plus : $90 = 7 \times 12 + 6$. 8 non plus : $90 = 8 \times 11 + 2$. On retombe ensuite sur 10, déjà trouvé. Diviseurs de 90 : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 15 ; 18 ; 30 ; 45 ; 90. Il y en a 12.

(b) $100 = 1 \times 100 = 2 \times 50 = 4 \times 25 = 5 \times 20 = 10 \times 10$. La somme des chiffres vaut 1 : ni 3 ni 9. $100 = 6 \times 16 + 4$: pas 6. $100 = 7 \times 14 + 2$: pas 7. $100 = 8 \times 12 + 4$: pas 8. 10 n'est écrit qu'une fois. Diviseurs de 100 : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20 ; 25 ; 50 ; 100. Il y en a 9.

(c) Faux. 100 a 9 diviseurs, et 9 est impair. La paire 10×10 ne donne qu'un seul diviseur, 10 : les diviseurs ne vont donc pas toujours par paires de deux nombres différents.

(d) 121 est impair : aucun nombre pair ne le divise. La somme des chiffres vaut 4 : ni 3 ni 9. Il se termine par 1 : ni 5 ni 10. $121 = 7 \times 17 + 2$: pas 7. Enfin $121 = 11 \times 11$. Diviseurs de 121 : 1 ; 11 ; 121. Il y en a 3.

(e) $144 = 12 \times 12$. Toutes les autres paires de produits égaux à 144 donnent deux diviseurs différents. Seule la paire 12×12 ne donne qu'un diviseur. Le nombre de diviseurs est donc un nombre pair plus 1 : il est impair (en fait, 144 a 15 diviseurs).

Ex. 16 ★★★ **Les bouquets de Clara**

(a) $84 = 1 \times 84 = 2 \times 42 = 3 \times 28 = 4 \times 21 = 6 \times 14 = 7 \times 12$. 5 ne convient pas : 84 se termine par 4. 8 non plus : $84 = 8 \times 10 + 4$. La somme des chiffres vaut 12, qui n'est pas dans la table de 9 : pas 9. 10 ne convient pas, et $84 = 11 \times 7 + 7$: pas 11. On retombe ensuite sur 12, déjà trouvé. Attention à 7 : il n'a pas de critère, il fallait faire la division. Diviseurs de 84 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 12 ; 14 ; 21 ; 28 ; 42 ; 84.

(b) Les diviseurs impairs de 84 sont 1 ; 3 ; 7 ; 21. On enlève 1. Clara peut faire 28 bouquets de 3 roses ($84 = 28 \times 3$), 12 bouquets de 7 roses ($84 = 12 \times 7$) ou 4 bouquets de 21 roses
($84 = 4 \times 21$).

Ex. 16 **(suite)**

(c) Les diviseurs de 84 compris entre 10 et 20 sont 12 et 14. Soit 7 bouquets de 12 roses ($84 = 7 \times 12$), soit 6 bouquets de 14 roses ($84 = 6 \times 14$).

(d) $60 = 1 \times 60 = 2 \times 30 = 3 \times 20 = 4 \times 15 = 5 \times 12 = 6 \times 10$. 7 ne convient pas : $60 = 7 \times 8 + 4$. 8 non plus : $60 = 8 \times 7 + 4$. La somme des chiffres vaut 6 : pas 9. On retombe ensuite sur 10. Diviseurs de 60 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60.

(e) Le nombre de bouquets doit être un diviseur commun à 84 et à 60. Les diviseurs communs sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12. Le plus grand diviseur commun est 12. Clara fait donc 12 bouquets. Chacun contient $84 \div 12 = 7$ roses et $60 \div 12 = 5$ tulipes.

3. *Multiples communs et diviseurs communs*

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes : multiples communs**

(a) Multiples de 15 : 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ; 90. Ceux qui sont aussi multiples de 6 : 30 ; 60 ; 90 ($30 = 6 \times 5$, $60 = 6 \times 10$, $90 = 6 \times 15$). Pour les autres, il reste 3 ($15 = 6 \times 2 + 3$, par exemple).

(b) Non. Table de 14 : 14 ; 28 ; 42 ; 56 ; 70, et $70 = 10 \times 7$. Le plus petit multiple commun non nul vaut donc 70, pas 140.

(c) Oui, $0 = 7 \times 0 = 11 \times 0$. Mais on l'exclut : le plus petit multiple commun non nul est 77 (table de 11 : 11 ; 22 ; … ; $77 = 7 \times 11$, et aucun multiple de 11 avant 77 n'est dans la table de 7).

(d) Par exemple 24 ; 48 ; 72 : $24 = 8 \times 3 = 12 \times 2$, $48 = 8 \times 6 = 12 \times 4$, $72 = 8 \times 9 = 12 \times 6$.

(e) Oui, $189 = 9 \times 21$: le produit est toujours un multiple commun. Mais ce n'est pas le plus petit non nul. Table de 21 : 21 ; 42 ; 63. $21 = 9 \times 2 + 3$ et $42 = 9 \times 4 + 6$, mais $63 = 9 \times 7$. Le plus petit multiple commun non nul est donc 63.

(f) $51 = 17 \times 3$, donc 51 est déjà un multiple de 17 : le plus petit multiple commun non nul est 51.

Ex. 18 ★☆☆ **Automatismes : diviseurs communs**

(a) Diviseurs de 20 : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20. Diviseurs de 28 : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28. Diviseurs communs : 1 ; 2 ; 4.

(b) C'est 1, car tout nombre a s'écrit $a = 1 \times a$: 1 est un diviseur de tout nombre.

Ex. 18 **(suite)**

(c) $52 = 13 \times 4$: 13 est un diviseur de 52, et c'est aussi le plus grand diviseur de 13. Le plus grand diviseur commun est donc 13.

(d) Diviseurs de 8 : 1 ; 2 ; 4 ; 8. Diviseurs de 15 : 1 ; 3 ; 5 ; 15. Le seul diviseur commun est 1.

(e) Non, sa liste est incomplète. Diviseurs de 24 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24. Diviseurs de 18 : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18. Diviseurs communs : 1 ; 2 ; 3 ; 6, donc le plus grand est 6.

Ex. 19 ★★☆ **Les deux phares de Brest**

(a) $8 \times 20 = 160$. 160 est dans la table de 8 ($160 = 8 \times 20$) et dans celle de 20 ($160 = 20 \times 8$). C'est donc un multiple commun : les phares s'allument ensemble au bout de 160 s.

(b) Table de 20 : 20 ; 40. $20 = 8 \times 2 + 4$, mais $40 = 8 \times 5$. Le plus petit multiple commun non nul est 40 : ils se rallument ensemble au bout de 40 s, pas de 160 s. Margaux se trompe.

(c) 2 min = 120 s. Multiples communs non nuls jusqu'à 120 : 40 ; 80 ; 120. Ils s'allument donc ensemble 3 fois (22 h 02 min compris).

(d) $5 \times 40 = 200$ s, et $200 = 60 \times 3 + 20$, soit 3 min 20 s. Ils s'allument ensemble pour la 5^e fois à 22 h 03 min 20 s.

Ex. 20 ★★☆ **Les sachets d'Inès**

(a) Oui : $42 = 7 \times 6$ et $56 = 7 \times 8$, avec un reste nul. Chaque sachet contient 6 caramels et 8 sucettes.

(b) Non : $42 = 4 \times 10 + 2$, il reste 2 caramels. 4 n'est pas un diviseur de 42.

(c) Diviseurs de 42 : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 ; 42. Diviseurs de 56 : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 8 ; 14 ; 28 ; 56. Nombres de sachets possibles (diviseurs communs) : 1 ; 2 ; 7 ; 14.

(d) Non : on partage, il faut donc un diviseur commun et non un multiple commun. Le plus grand diviseur commun est 14 : on fait 14 sachets, chacun avec 3 caramels ($42 = 14 \times 3$) et 4 sucettes ($56 = 14 \times 4$).

Ex. 21 ★★☆ **Le jeu de cartes de Ben**

(a) 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ; 72 ; 84 ; 96 ; 108 ; 120 ; 132 ; 144.

(b) Comme $12 = 6 \times 2$, tous ces nombres sont des multiples de 6. Un multiple de 10 a pour chiffre des unités 0 : seuls 60 et 120 conviennent ($60 = 10 \times 6$, $120 = 10 \times 12$). Réponse : 60 ; 120.

Ex. 21 **(suite)**

(c) C'est 60, le premier multiple de 12 qui est aussi multiple de 6 et de 10 (ce n'est pas le produit $6 \times 10 \times 12 = 720$).

(d) Le nombre de cartes est un multiple commun de 6, 10 et 12 compris entre 100 et 150 : c'est 120 (le suivant, 180, dépasse 150). Avec des paquets de 6, Ben en fait 20, car $120 = 6 \times 20$.

Ex. 22 ★★★ **Le cahier d'erreurs de Lucas**

(a) Lucas se trompe. 0 est bien un multiple commun, mais on demande le plus petit multiple commun NON NUL. Je parcours la table de 33 : 33 ; 66. $33 = 22 \times 1 + 11$, mais $66 = 22 \times 3$. Le plus petit multiple commun non nul de 22 et de 33 est 66.

(b) Lucas se trompe. Diviseurs de 25 : 1 ; 5 ; 25. Diviseurs de 18 : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18. 1 est un diviseur de tout nombre, donc 1 est un diviseur commun. Leur seul diviseur commun est 1.

(c) Lucas se trompe : sa liste des diviseurs de 80 est incomplète. $80 = 1 \times 80 = 2 \times 40 = 4 \times 20 = 5 \times 16 = 8 \times 10$, donc il a oublié 16 ; 20 ; 40 ; 80. En comparant les deux listes complètes, les diviseurs communs sont 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16. Le plus grand diviseur commun est 16.

(d) Lucas se trompe. $76 = 19 \times 4$, donc 76 est un multiple de 19, et c'est aussi le plus petit multiple non nul de 76. Le plus petit multiple commun non nul de 19 et de 76 est donc 76, et non 1 444.

(e) Lucas se trompe. $294 = 14 \times 21$ est un multiple de 14 et $294 = 21 \times 14$ est un multiple de 21 : c'est un multiple commun. Le produit est toujours un multiple commun, même s'il n'est pas le plus petit ($294 = 42 \times 7$).

Ex. 23 ★★★ **Les navettes du port de Sète**

(a) Table de 25 : 25 ; 50 ; 75 ; 100. 25, 50 et 75 ne sont pas dans la table de 20. $100 = 20 \times 5$, donc 100 y est. Le plus petit multiple commun non nul de 20 et de 25 est 100.

(b) 100 min = 60 min +40 min = 1 h 40 min. Les navettes repartiront ensemble à 9 h +1 h 40 min, c'est-à-dire à 10 h 40.

(c) De 9 h à 14 h, il y a $5 \times 60 = 300$ min. Les départs communs ont lieu à des multiples communs de 20 et de 25, c'est-à-dire à 0 ; 100 ; 200 ; 300 minutes après 9 h, car $300 = 100 \times 3$. Elles partent ensemble à 9 h, 10 h 40, 12 h 20 et 14 h.

Ex. 23 **(suite)**

(d) Hugo a tort. Il confond multiple commun et diviseur commun. Le nombre de caisses doit diviser 20 et 25. Or 100 ne divise pas 20 : 100 caisses ne peuvent pas recevoir chacune le même nombre de gilets rouges.

(e) Diviseurs de 20 : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20. Diviseurs de 25 : 1 ; 5 ; 25. Les diviseurs communs sont 1 et 5, et le plus grand diviseur commun est 5. Hugo peut remplir au maximum 5 caisses. Chacune contient $20 \div 5 = 4$ gilets rouges et $25 \div 5 = 5$ gilets jaunes.

Ex. 24 ★★★ **Le carrelage de Malo**

(a) $84 = 8 \times 10 + 4$: le reste est 4, pas 0. 8 n'est donc pas un diviseur de 84. Malo ne peut pas utiliser des carreaux de 8 cm sans en couper.

(b) $84 = 1 \times 84 = 2 \times 42 = 3 \times 28 = 4 \times 21 = 6 \times 14 = 7 \times 12$. Diviseurs de 84 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 12 ; 14 ; 21 ; 28 ; 42 ; 84. $60 = 1 \times 60 = 2 \times 30 = 3 \times 20 = 4 \times 15 = 5 \times 12 = 6 \times 10$. Diviseurs de 60 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60. Diviseurs communs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12.

(c) Le côté du carreau doit être un diviseur commun de 84 et de 60. Le plus grand diviseur commun est 12, donc le plus grand carreau mesure 12 cm de côté. On a $84 \div 12 = 7$ et $60 \div 12 = 5$: il faut $7 \times 5 = 35$ carreaux.

(d) $96 = 48 \times 2$, donc 48 est un diviseur de 96. C'est aussi le plus grand diviseur de 48. Le plus grand diviseur commun de 48 et de 96 est donc 48 : le plus grand carreau mesure 48 cm de côté. Il en faut $1 \times 2 = 2$.

(e) Diviseurs de 35 : 1 ; 5 ; 7 ; 35. Diviseurs de 64 : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64. Leur seul diviseur commun est 1. Le plus grand carreau mesure donc 1 cm de côté. Il en faut $35 \times 64 = 2\,240$.

4. *Critères de divisibilité par 3 et par 9*

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : divisible par 3 ?**

(a) $7 + 3 = 10$ n'est pas dans la table de 3 : 73 n'est pas divisible par 3, même s'il se termine par 3.

(b) $8 + 7 = 15$ est dans la table de 3 : 87 est divisible par 3 ($87 = 3 \times 29$), même s'il se termine par 7.

(c) $6 + 1 + 0 + 2 = 9$ est dans la table de 3 : 6 102 est divisible par 3 ($6\,102 = 3 \times 2\,034$).

Ex. 25 **(suite)**

(d) $9+1=10$ n'est pas dans la table de 3 : 91 n'est pas divisible par 3.

(e) $5+2+8+1=16$ n'est pas dans la table de 3 : 5 281 n'est pas divisible par 3.

(f) $7+0+4+0+1=12$ est dans la table de 3 : 70 401 est divisible par 3 ($70\,401 = 3 \times 23\,467$).

Ex. 26 ★☆☆ **Automatismes : par 9, et donc par 3 ?**

(a) $2+4+5+7=18$ est dans la table de 9 : 2 457 est divisible par 9 ($2\,457 = 9 \times 273$), donc aussi par 3.

(b) $6+1+2=9$ est dans la table de 9 : 612 est divisible par 9 ($612 = 9 \times 68$), donc aussi par 3.

(c) $7+0+3+5=15$ est dans la table de 3 mais pas dans celle de 9 : 7 035 est divisible par 3 ($7\,035 = 3 \times 2\,345$), mais pas par 9.

(d) $8+7+9+8+6+7=45$, puis $4+5=9$: 879 867 est divisible par 9 ($879\,867 = 9 \times 97\,763$), donc aussi par 3.

(e) $5+9+8+7+7+8=44$, puis $4+4=8$, qui n'est ni dans la table de 3 ni dans celle de 9 : 598 778 n'est divisible ni par 3 ni par 9.

(f) $9+9+9+3+9=39$, puis $3+9=12$: 12 est dans la table de 3 mais pas dans celle de 9. 99 939 est divisible par 3 mais pas par 9, même s'il se termine par 9.

Ex. 27 ★★☆ **Tableau de divisibilité et conditions combinées**

(a) 4 680 (somme 18) : oui, oui, oui, oui. 7 245 (somme 18) : non, oui, oui, oui. 3 318 (somme 15) : oui, oui, non, non. 2 535 (somme 15) : non, oui, oui, non. 8 014 (somme 13) : oui, non, non, non.

(b) 4 680 est pair et la somme de ses chiffres, 18, est dans la table de 9. 3 318 est pair aussi, mais 15 n'est pas dans la table de 9. Seul 4 680 convient.

(c) 2 535 se termine par 5, et sa somme 15 est dans la table de 3 mais pas dans celle de 9. 7 245 ne convient pas, car il est aussi divisible par 9.

(d) 4 680, car il est divisible par 2 et par 5 : il se termine par 0. Les autres nombres qui sont divisibles par 5 (7 245 et 2 535) sont impairs.

Ex. 28 ★★☆ **Chiffres manquants**

(a) $5+\square+2=7+\square$ doit valoir 9, 12 ou 15.
Donc $\square = 2$, 5 ou 8 : trois solutions, 522, 552 et 582.

(b) $3+8+\square+5=16+\square$ doit valoir 18 (9 est trop petit, 27 trop grand).
Donc $\square = 2$, une seule solution : $3\,825 = 9 \times 425$.

(c) $6+\square+2+1=9+\square$ doit valoir 9 ou 18.
Donc $\square = 0$ ou 9 : $6\,021 = 9 \times 669$ et $6\,921 = 9 \times 769$.

(d) $3+0+\square+1+5+2=11+\square$ doit valoir 12, 15 ou 18 (sans oublier aucun chiffre).
Donc $\square = 1$, 4 ou 7 : trois solutions, 301 152, 304 152 et 307 152.

Ex. 29 ★★☆ **Ont-ils raison ?**

(a) Non. Le dernier chiffre ne dit rien pour 3 : $6+5+2+3=16$ n'est pas dans la table de 3, donc 6 523 n'est pas divisible par 3.

(b) Non. La somme $1+9+2+6=18$ montre seulement que 1 926 est divisible par 9. Le quotient est 214 : $1\,926 = 9 \times 214$.

(c) Non. $5+7+3+6=21$ est dans la table de 3 mais pas dans celle de 9 : 5 736 est divisible par 3 ($5\,736 = 3 \times 1\,912$) mais pas par 9.

(d) Non. Yanis a oublié le chiffre 4 : $2+6+1+5+4=18$. 26 154 est divisible par 3, et même par 9 ($26\,154 = 9 \times 2\,906$).

(e) Oui. Changer l'ordre des chiffres ne change pas leur somme : dans les deux cas, elle vaut 18. On a $4\,581 = 9 \times 509$ et $8\,154 = 9 \times 906$.

Ex. 30 ★★★ **Nombres mystères à plusieurs conditions**

(a) La somme vaut 4 plus le double du chiffre caché : c'est un nombre pair entre 6 et 22 (le chiffre des centaines n'est pas 0). Dans la table de 9, 9 est impair et 27 trop grand : seul 18 convient. Le double vaut 14, donc le chiffre est 7. Une seule solution : $747 = 9 \times 83$.

(b) Pour 5, le chiffre des unités est 0 ou 5. La somme des autres chiffres vaut $7+4+8=19$. Avec 0, la somme vaut 19 : pas dans la table de 3. Avec 5, elle vaut 24, qui est dans la table de 3. Une seule solution : $7\,485 = 5 \times 1\,497 = 3 \times 2\,495$.

Ex. 30 **(suite)**

(c) Pour 2, le chiffre des unités est pair. La somme vaut $3+6+1+\square = 10+\square$. Elle doit être dans la table de 9, donc égale à 18 (27 est trop grand) : $\square = 8$, et 8 est bien pair. Une seule solution : $3\,618 = 9 \times 402 = 2 \times 1\,809$.

(d) Le nombre s'écrit $5\square 0$ et la somme de ses chiffres vaut $5+\square$. Pour 3, cette somme vaut 6, 9 ou 12 (15 demanderait $\square = 10$), donc $\square = 1$, 4 ou 7. Pour 540, la somme vaut 9 : il est divisible par 9, donc on l'élimine. Il reste deux solutions : $510 = 3 \times 170$ et $570 = 3 \times 190$, avec des sommes 6 et 12 qui ne sont pas dans la table de 9.

Ex. 31 ★★★ **Problème : les sachets du confiseur**

(a) 2 574 se termine par 4, qui est pair : il est divisible par 2 ($2\,574 = 2 \times 1\,287$). Il ne se termine ni par 0 ni par 5, donc il n'est pas divisible par 5 ($2\,574 = 5 \times 514 + 4$). La somme de ses chiffres vaut $2+5+7+4 = 18$, qui est dans la table de 3 : il est divisible par 3 ($2\,574 = 3 \times 858$). Hugo peut faire des sachets de 2 ou de 3, mais pas de 5.

(b) $2+5+7+4 = 18$ est dans la table de 9 : c'est possible. Attention, 18 n'est pas le nombre de sachets : $2\,574 = 9 \times 286$. Hugo obtient 286 sachets.

(c) Le total va de 2 575 à 2 583. Les sommes dans la table de 3 : 2 577 (21), 2 580 (15), 2 583 (18). 18 est dans la table de 9 : on écarte 2 583. Hugo a reçu 3 ou 6 bonbons : $2\,577 = 3 \times 859$ et $2\,580 = 3 \times 860$.

(d) $6+8+7+4+9+5 = 39$, puis $3+9 = 12$. 12 est dans la table de 3 mais pas dans celle de 9. Il peut faire des sachets de 3 ($687\,495 = 3 \times 229\,165$), mais pas de 9 ($687\,495 = 9 \times 76\,388 + 3$).

Ex. 32 ★★★ **Vrai ou faux ? Justifie**

(a) Faux. Un multiple de 5 peut aussi se terminer par 0. Contre-exemple : 4 170, car $4+1+7+0 = 12$ est dans la table de 3 : $4\,170 = 5 \times 834 = 3 \times 1\,390$.

(b) Vrai. La somme des chiffres vaut trois fois le chiffre répété (par exemple $7+7+7 = 3 \times 7 = 21$) : elle est toujours dans la table de 3. Ainsi, $777 = 3 \times 259$.

(c) Vrai. $9 = 3 \times 3$, donc tout multiple de 9 est aussi un multiple de 3. Par exemple, $819 = 9 \times 91 = 3 \times 273$.

(d) Faux. $8+8+8+8+8+8 = 48$, puis $4+8 = 12$: 12 est dans la table de 3 mais pas dans celle de 9. 888 888 n'est pas divisible par 9, mais il l'est par 3 : $888\,888 = 3 \times 296\,296$.

Ex. 32 **(suite)**

(e) Faux. $8+1+\square+0 = 9+\square$ doit valoir 9, 12, 15 ou 18 : $\square = 0$, 3, 6 ou 9. Il y a quatre façons : 8 100, 8 130, 8 160 et 8 190.

5. *Critère de divisibilité par 4 (complément) et tous les critères*

Ex. 33 ★☆☆ **Automatismes : le critère de divisibilité par 4**

(a) Les deux derniers chiffres forment $24 = 4 \times 6$.
Donc 9 524 est divisible par 4 : $9\,524 = 4 \times 2\,381$.

(b) Les deux derniers chiffres forment $50 = 4 \times 12 + 2$, et le reste n'est pas 0.
Donc 4 n'est pas un diviseur de 3 150, même si ce nombre est pair.

(c) Les deux derniers chiffres forment $34 = 4 \times 8 + 2$.
Donc 2 734 n'est pas un multiple de 4, même s'il se termine par 4.

(d) Les deux derniers chiffres forment 08, c'est-à-dire $8 = 4 \times 2$.
Donc 40 708 est dans la table de 4 : $40\,708 = 4 \times 10\,177$.

(e) Les deux derniers chiffres forment $12 = 4 \times 3$, donc 612 est divisible par 4. Oui : $612 = 4 \times 153$, ce qui fait 153 billes par part.

(f) Les deux derniers chiffres forment $92 = 4 \times 23$.
Donc 135 792 est divisible par 4 : $135\,792 = 4 \times 33\,948$.

Ex. 34 ★☆☆ **Automatismes : chiffre manquant et divisibilité par 4**

(a) $\square 8$ doit être 08 ; 28 ; 48 ; 68 ou 88 (n'oublie pas que $08 = 8$).
Donc $\square = 0$; 2 ; 4 ; 6 ou 8.

(b) Les deux derniers chiffres forment $32 = 4 \times 8$, quel que soit $\square$. Les dix chiffres conviennent : $\square = 0$; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

(c) $8\square$ doit être 80 ; 84 ou 88.
Donc $\square = 0$; 4 ou 8.

(d) $5\square$ doit être $52 = 4 \times 13$ ou $56 = 4 \times 14$. Il y a donc 2 solutions : $\square = 2$ ou 6.

(e) $\square 2$ doit être 12 ; 32 ; 52 ; 72 ou 92 ($02 = 2$ ne convient pas).
Donc $\square = 1$; 3 ; 5 ; 7 ou 9.

(f) C'est impossible. Le nombre se termine par 5, donc il est impair : il n'est même pas divisible par 2, alors il ne peut pas être divisible par 4.

Ex. 35 ★★☆ **Tous les critères dans un tableau**

(a) 4 170 : la somme des chiffres vaut 12 → divisible par 3, mais pas par 9 ; $70 = 4 \times 17 + 2$ → pas divisible par 4 ; il se termine par 0 → divisible par 10. 73 512 : la somme vaut 18 → divisible par 3 et par 9 ; $12 = 4 \times 3$ → divisible par 4 ; il se termine par 2 → pas divisible par 10. 208 856 : la somme vaut 29 → divisible ni par 3 ni par 9 ; $56 = 4 \times 14$ → divisible par 4 ; il se termine par 6 → pas divisible par 10. 6 300 : la somme vaut 9 → divisible par 3 et par 9 ; $00 = 4 \times 0$ → divisible par 4 ; il se termine par 0 → divisible par 10.

(b) 4 170 se termine par 0, il est donc pair. Mais $70 = 4 \times 17 + 2$: il n'est pas divisible par 4.

(c) Être divisible par 2 et par 5, c'est être divisible par 10. Ce sont donc 4 170 et 6 300, qui se terminent par 0.

(d) 6 300 se termine par 0 : il est divisible par 2, par 5 et par 10. La somme de ses chiffres vaut 9 : il est divisible par 3 et par 9. Ses deux derniers chiffres forment $00 = 4 \times 0$: il est divisible par 4. Les autres ne conviennent pas : 4 170 n'est pas divisible par 4, et 73 512 et 208 856 ne se terminent pas par 0.

Ex. 36 ★★☆ **Vrai ou faux sur le critère par 4**

(a) Faux. 58 est pair, mais $58 = 4 \times 14 + 2$: le reste n'est pas 0, donc 58 n'est pas divisible par 4.

(b) Vrai. $4 = 2 \times 2$, donc tout multiple de 4 est aussi un multiple de 2. Par exemple, $28 = 4 \times 7 = 2 \times 14$.

(c) Non. 316 se termine par 6, et ses deux derniers chiffres forment $16 = 4 \times 4$.
Donc 316 est divisible par 4 : $316 = 4 \times 79$. Il faut regarder les deux derniers chiffres, pas le dernier seul.

(d) Vrai. Divisible par 5 : il se termine par 0 ou par 5. Divisible par 4 : il est pair, donc il ne se termine pas par 5. Il se termine donc par 0
(exemple : 60).

Ex. 37 ★★☆ **Nombres mystères à plusieurs conditions**

(a) 100 est divisible par 4, car ses deux derniers chiffres forment 00. Le nombre pair suivant est 102 :
$02 = 2 = 4 \times 0 + 2$, donc 102 n'est pas divisible par 4. La réponse est 102.

(b) On parcourt les multiples de 4 à partir de 1 000 et on vérifie la somme des chiffres. 1 000 : somme 1 ; 1 004 : somme 5 ; 1 008 : somme 9, qui est dans la table de 9. La réponse est 1 008.

Ex. 37 (suite)

(c) Divisible par 4 et par 5 : il se termine par 00 ; 20 ; 40 ; 60 ou 80. On part du plus grand : 980 a une somme de chiffres de 17, ce n'est pas un multiple de 3. 960 a une somme de 15, qui est dans la table de 3. La réponse est 960.

(d) Pour 9, la somme $2 + 4 + \square + 8 = 14 + \square$ doit être dans la table de 9. Elle vaut au plus 23, donc elle vaut 18 et $\square = 4$. Pour 4, on vérifie : $48 = 4 \times 12$. Je suis 2 448.

Ex. 38 ★★★ **Le cahier de Lina**

(a) Elle a tort. Pour 4, on regarde le nombre formé par les deux derniers chiffres, pas le dernier chiffre seul. Ici c'est 14, et $14 = 4 \times 3 + 2$ n'est pas dans la table de 4. D'ailleurs $503\,514 = 4 \times 125\,878 + 2$: le reste vaut 2. Donc 503 514 n'est pas divisible par 4.

(b) Elle a tort. La somme des chiffres sert pour 3 et pour 9, pas pour 4. Les deux derniers chiffres forment 30, et $30 = 4 \times 7 + 2$ n'est pas dans la table de 4. On a bien $2\,330 = 4 \times 582 + 2$, avec un reste de 2.
Donc 2 330 n'est pas divisible par 4.

(c) Elle a tort. 04, c'est le nombre 4, et $4 = 4 \times 1$ est dans la table de 4.
Donc 62 104 est divisible par 4 : $62\,104 = 4 \times 15\,526$, avec un reste de 0.

(d) La première partie est vraie : $52 = 4 \times 13$, donc $7\,252 = 4 \times 1\,813$. Comme $4 = 2 \times 2$, on a aussi $7\,252 = 2 \times 3\,626$. Un multiple de 4 est toujours pair.
La seconde partie est fausse : 7 254 est pair, mais $54 = 4 \times 13 + 2$ n'est pas dans la table de 4. En effet $7\,254 = 4 \times 1\,813 + 2$. Divisible par 4 entraîne divisible par 2, mais l'inverse est faux.

Ex. 39 ★★★ **Le code du coffre**

(a) Les deux derniers chiffres forment $\square 6$, qui doit être dans la table de 4. Les possibilités sont 16, 36, 56, 76 et 96. Le nombre $06 = 6 = 4 \times 1 + 2$ ne convient pas, et 26, 46, 66, 86 non plus.
Donc $\square = 1\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 9$: il y a cinq solutions.

(b) La somme des chiffres vaut $2 + 9 + 1 + \square + 6 = 18 + \square$. Avec 1, 5 et 7, on obtient 19, 23 et 25, qui ne sont pas dans la table de 3. Avec 3 et 9, on obtient 21 et 27, qui sont dans la table de 3.
Donc $\square = 3$ ou $\square = 9$.

Ex. 39 **(suite)**

(c) Pour 9, la somme $18 + \square$ doit être dans la table de 9. Parmi les chiffres trouvés à la première question, seul $\square = 9$ convient : la somme vaut 27. Avec $\square = 3$, la somme 21 est dans la table de 3 mais pas dans celle de 9. Le code est donc $29\,196 = 9 \times 3\,244$.

(d) Non. Le chiffre des unités est 6, et pas 0 ou 5 : le code n'est jamais divisible par 5. Pour être divisible par 10, il faudrait qu'il soit divisible par 2 et par 5. Il n'est donc pas divisible par 10 non plus.

Ex. 40 ★★★ **Les chaises du concert**

(a) Non. Les rangées de 4 sont possibles, car $44 = 4 \times 11$. Mais la somme des chiffres vaut $2 + 0 + 4 + 4 = 10$, qui n'est pas dans la table de 9. En effet $2\,044 = 9 \times 227 + 1$: il resterait une chaise. Ce nombre ne convient donc pas.

(b) La somme des chiffres de 2 007 vaut 9, donc 2 007 est divisible par 9. Ensuite, on ajoute 9 à chaque fois. On obtient 2 007 ; 2 016 ; 2 025 ; 2 034 ; 2 043 ; 2 052 ; 2 061 ; 2 070 ; 2 079 ; 2 088 ; 2 097.

(c) Les nombres impairs ne sont pas divisibles par 4. Parmi les nombres pairs, 2 034 ne convient pas car $34 = 4 \times 8 + 2$. De même, 2 070 ne convient pas car $70 = 4 \times 17 + 2$: ces deux nombres sont pairs mais pas divisibles par 4. Par contre, $16 = 4 \times 4$, $52 = 4 \times 13$ et $88 = 4 \times 22$ sont dans la table de 4. Les nombres qui conviennent sont donc 2 016 ; 2 052 ; 2 088.

(d) Le plus petit nombre possible est 2 016 chaises. On a $2\,016 = 4 \times 504$, soit 504 rangées de 4, et $2\,016 = 9 \times 224$, soit 224 rangées de 9.

(e) Non. Pour être divisible par 10, le chiffre des unités doit être 0. Or 2 016, 2 052 et 2 088 ne se terminent pas par 0. Le nombre 2 070 se termine bien par 0, mais il n'est pas divisible par 4. Aucun nombre ne permet les trois rangements.

6. *Problèmes : partages, rangements, rendez-vous*

Ex. 41 ★☆☆ **Automatismes : multiple commun ou diviseur commun ?**

(a) Multiple commun : les clignotements se répètent et on cherche quand ils tombent ensemble (ici après 70 s).

(b) Diviseur commun : on partage 60 et 42 sans reste (au plus 6 trousses).

Ex. 41 **(suite)**

(c) Multiple commun : chaque hauteur de pile est un multiple de la hauteur d'un cube (au plus bas, 12 cm).

(d) Diviseur commun : le côté du carré doit diviser 210 et 150 (au plus grand, 30 cm).

(e) Multiple commun : les passages se répètent toutes les 3 min et toutes les 5 min (ensemble après 15 min).

(f) Diviseur commun : le nombre de plateaux doit diviser 24 et 30 (au plus 6 plateaux).

Ex. 42 ★☆☆ **Automatismes : sans reste ou pas ?**

(a) $84 = 7 \times 12$, reste 0 : oui, on obtient 12 rangées complètes.

(b) $130 = 6 \times 21 + 4$, reste 4 : non, il reste 4 œufs et une boîte n'est pas pleine.

(c) 96 se termine par 6, ni par 0 ni par 5, donc il n'est pas divisible par 5 : $96 = 5 \times 19 + 1$, il reste 1 carte.

(d) $1 + 1 + 7 = 9$, qui est dans la table de 9 : $117 = 9 \times 13$, oui, on forme 13 équipes.

(e) 2 350 se termine par 0, donc il est divisible par 10 : oui, 235 sachets.

(f) $2 + 4 + 5 = 11$, qui n'est pas dans la table de 3 : $245 = 3 \times 81 + 2$, il reste 2 tulipes.

Ex. 43 ★★☆ **Les ferries de Marseille**

(a) 30 ; 60 ; 90 ; 120 ; 150 ; 180.

(b) $30 = 18 \times 1 + 12$ (reste 12) ; $60 = 18 \times 3 + 6$ (reste 6) ; $90 = 18 \times 5$ (reste 0). Le plus petit multiple commun non nul de 18 et de 30 est 90.

(c) De 7 h à 7 h 54, il s'écoule 54 min. $54 = 18 \times 3$, reste 0 : le ferry A part à 7 h 54. $54 = 30 \times 1 + 24$, reste 24 : le ferry B ne part pas. Ils ne partent pas ensemble à 7 h 54.

(d) 7 h +90 min = 7 h +1 h 30 min = 8 h 30. Les deux ferries repartent ensemble à 8 h 30.

(e) Le multiple commun suivant est 180 : $180 = 18 \times 10 = 30 \times 6$. 7 h +180 min = 7 h +3 h = 10 h. Ils repartent ensemble à 10 h.

Ex. 44 ★★☆ **Les sachets de bonbons d'Inès**

(a) $72 = 1 \times 72 = 2 \times 36 = 3 \times 24 = 4 \times 18 = 6 \times 12 = 8 \times 9$; 5 et 7 ne conviennent pas ($72 = 7 \times 10 + 2$). Diviseurs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 18 ; 24 ; 36 ; 72.

(b) $120 = 1 \times 120 = 2 \times 60 = 3 \times 40 = 4 \times 30 = 5 \times 24 = 6 \times 20 = 8 \times 15 = 10 \times 12$; 7 ($120 = 7 \times 17 + 1$) et 9 (somme des chiffres 3) ne conviennent pas. Diviseurs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 24 ; 30 ; 40 ; 60 ; 120.

(c) Diviseurs communs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24. Le plus grand diviseur commun est 24 : elle peut faire au plus 24 sachets.

(d) $72 = 24 \times 3$ et $120 = 24 \times 5$: chaque sachet contient 3 caramels et 5 chocolats.

(e) $72 = 9 \times 8$, mais $1 + 2 + 0 = 3$ n'est pas dans la table de 9 : $120 = 9 \times 13 + 3$. Non, il resterait 3 chocolats.

Ex. 45 ★★☆ **Les chaises de la salle de Lille**

(a) 225 ; 234 ; 243 ; 252
(9×25 à 9×28).

(b) Les nombres pairs sont 234 et 252. Or 252 se termine par 2 : il reste 234.

(c) $2 + 3 + 4 = 9$, qui est dans la table de 9 : $234 = 9 \times 26$. La salle compte 234 chaises.

(d) $234 = 12 \times 19 + 6$, reste 6 : non, il resterait 6 chaises.

(e) $234 = 18 \times 13$, reste 0 : oui, Noah obtient 13 rangées complètes de 18 chaises.

Ex. 46 ★★★ **Le carrelage de la salle de bains de Hugo**

(a) Le long du côté de 96 cm, on aligne des carreaux complets : le côté doit donc diviser 96. De même, il doit diviser 156. On cherche un diviseur commun et non un multiple commun, car le carreau est plus petit que le mur.

(b) $96 = 8 \times 12$: le reste vaut 0. Mais $156 = 8 \times 19 + 4$: le reste vaut 4.
Donc 8 ne divise pas 156, et des carreaux de 8 cm obligeraient à faire des découpes. Ce n'est pas possible.

Ex. 46 (suite)

(c) $96 = 1 \times 96 = 2 \times 48 = 3 \times 32 = 4 \times 24 = 6 \times 16 = 8 \times 12$. Ni 5 ni 10 (chiffre des unités 6), ni 7 ($96 = 7 \times 13 + 5$), ni 9 (somme des chiffres 15), ni 11 ($96 = 11 \times 8 + 8$) ne conviennent ; ensuite on retombe sur 12. Diviseurs de 96 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 32 ; 48 ; 96. $156 = 1 \times 156 = 2 \times 78 = 3 \times 52 = 4 \times 39 = 6 \times 26 = 12 \times 13$. Ni 5, ni 7 ($156 = 7 \times 22 + 2$), ni 8 ($156 = 8 \times 19 + 4$), ni 9 (somme des chiffres 12), ni 10, ni 11 ($156 = 11 \times 14 + 2$) ne conviennent. Diviseurs de 156 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 ; 13 ; 26 ; 39 ; 52 ; 78 ; 156.

(d) Les diviseurs communs sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12. Le plus grand diviseur commun est 12. Comme $96 = 12 \times 8$ et $156 = 12 \times 13$, on pose 8 rangées de 13 carreaux, soit $8 \times 13 = 104$ carreaux. Hugo posera 104 carreaux de 12 cm de côté.

Ex. 47 ★★★ **Le train et le car de la gare de Bordeaux**

(a) De 7 h à 9 h 40, il s'écoule 160 min. $160 = 40 \times 4$: le reste vaut 0, donc le car part à 9 h 40. Mais $160 = 25 \times 6 + 10$: le reste vaut 10, donc le train ne part pas à cette heure-là. Ils ne partent pas ensemble à 9 h 40.

(b) Multiples de 40 : 40 ; 80 ; 120 ; 160 ; 200. $40 = 25 \times 1 + 15$; $80 = 25 \times 3 + 5$; $120 = 25 \times 4 + 20$; $160 = 25 \times 6 + 10$: les restes ne sont pas nuls. $200 = 25 \times 8$, reste 0. Le plus petit multiple commun non nul de 25 et de 40 est 200.

(c) 200 min = 180 min +20 min = 3 h 20 min. 7 h +3 h 20 min = 10 h 20. Le train et le car repartent ensemble pour la première fois à 10 h 20.

(d) 1 000 est bien un multiple commun de 25 et de 40 : $1\,000 = 25 \times 40$. Mais ce n'est pas le plus petit, puisque 200 convient déjà et que $200 < 1\,000$. Zoé a tort : ils se retrouvent pour la première fois au bout de 200 min.

(e) De 7 h à 20 h, il s'écoule $13 \times 60 = 780$ min. Les départs simultanés ont lieu toutes les 200 min : à 0, 200, 400 et 600 min. 800 min dépasse 780 min. Ils partent donc ensemble 4 fois : à 7 h, 10 h 20, 13 h 40 et 17 h.

Ex. 48 ★★★ **Le tournoi de handball de Nantes**

(a) $48 = 6 \times 8$: le reste vaut 0. Mais $64 = 6 \times 10 + 4$: le reste vaut 4. On ne peut pas répartir les garçons sans reste, donc Camille ne peut pas former 6 équipes identiques.

Ex. 48 **(suite)**

(b) On cherche le plus grand diviseur commun de 48 et de 64. Diviseurs de 48 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48. Diviseurs de 64 : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64. Le plus grand diviseur commun est 16. On a $48 = 16 \times 3$ et $64 = 16 \times 4$. Camille peut former au plus 16 équipes, chacune de 3 filles et 4 garçons.

(c) Le nombre cherché est un multiple commun de 10 et de 12. Dans la table de 12, entre 250 et 400, les multiples de 10 (ceux qui se terminent par 0) sont $300 = 12 \times 25$ et $360 = 12 \times 30$. La somme des chiffres de 360 vaut 9, qui est dans la table de 9 : on élimine 360. La somme des chiffres de 300 vaut 3, qui n'est pas dans la table de 9. Il y a donc 300 spectateurs.

(d) $300 = 10 \times 30$ et $300 = 12 \times 25$: les restes valent 0. 300 est bien compris entre 250 et 400. La somme de ses chiffres vaut 3, donc 300 n'est pas divisible par 9. Il y a 300 spectateurs : 30 rangées de 10, ou 25 rangées de 12.