1. *Rappels de 5e : multiples, diviseurs et critères*

Ex. 1 ★☆☆ Division euclidienne et reste

(a) $245 = 7 \times 35 + 0$: le reste est 0, donc 245 est divisible par 7.

(b) $302 = 8 \times 37 + 6$: le reste est 6, il n'est pas nul, donc 302 n'est pas divisible par 8.

(c) $391 = 17 \times 23 + 0$: le reste est 0, donc 391 est divisible par 17.

(d) $500 = 13 \times 38 + 6$: le reste n'est pas nul, donc 500 n'est pas divisible par 13.

(e) $1\,000 = 24 \times 41 + 16$: le reste est 16, il n'est pas nul, donc 1 000 n'est pas divisible par 24.

Ex. 2 ★☆☆ Multiple ou diviseur ?

(a) Vrai : $56 = 8 \times 7$.

(b) Faux : $63 = 9 \times 7$, donc c'est 63 qui est un multiple de 9 (9 est un diviseur de 63).

(c) Vrai : $91 = 7 \times 13$.

(d) Faux : $117 = 9 \times 13$, donc 117 est un multiple de 9, et 9 est un diviseur de 117.

(e) Vrai : $0 = 14 \times 0$.

(f) Faux : $84 = 8 \times 10 + 4$, le reste n'est pas nul. Être divisible par 2 et par 4 ne garantit pas d'être divisible par 8.

Ex. 3 ★☆☆ Tableau des critères

(a) Unités 8 : par 2 oui. $38 = 4 \times 9 + 2$: par 4 non. $2 + 5 + 3 + 8 = 18$: par 3 oui, par 9 oui.

(b) Unités 4 : par 2 oui. $34 = 4 \times 8 + 2$: par 4 non. $1 + 7 + 3 + 4 = 15$: par 3 oui, par 9 non.

(c) Unités 6 : par 2 oui. $16 = 4 \times 4$: par 4 oui. $3 + 8 + 1 + 6 = 18$: par 3 oui, par 9 oui.

(d) Unités 3 : par 2 non, par 4 non. $4 + 2 + 7 + 3 = 16$: par 3 non, par 9 non
(le chiffre des unités 3 ne compte pas).

(e) Unités 9 : par 2 non, par 4 non. $5 + 0 + 1 + 9 = 15$: par 3 oui, par 9 non
(le chiffre des unités 9 ne suffit pas).

Ex. 4 ★★☆ Chiffre manquant

(a) $7{+}? + 2 = 9{+}?$ doit être divisible par 9 : $? = 0$ ou 9. Les nombres possibles sont 702 et 792.

(b) Par 3 : $3 + 1{+}? = 4{+}?$ doit être divisible par 3, donc $? = 2$, 5 ou 8. Par 2, le nombre doit être pair : on exclut 5 (315 est impair). Les nombres possibles sont 312 et 318.

(c) Les deux derniers chiffres ?6 doivent former un multiple de 4 : 16, 36, 56, 76, 96.
Donc $? = 1$, 3, 5, 7 ou 9
(2 526 est pair mais $26 = 4 \times 6 + 2$).

(d) Par 5 : le chiffre des unités est 5, c'est bon. Par 3 : $1{+}? + 3 + 5 = 9{+}?$ doit être divisible par 3, donc $? = 0$, 3, 6 ou 9. Les nombres possibles sont 1 035, 1 335, 1 635 et 1 935.

Ex. 5 ★★☆ Listes de diviseurs

(a) $78 = 1 \times 78 = 2 \times 39 = 3 \times 26 = 6 \times 13$. 4, 5, 7 ($78 = 7 \times 11 + 1$) et 8 ne conviennent pas. Comme $9 \times 9 = 81$ dépasse 78, on peut s'arrêter. Diviseurs de 78 : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 13 ; 26 ; 39 ; 78.

(b) Le nombre de cartes par paquet est un diviseur de 78, différent de 1 et de 78 : 2, 3, 6, 13, 26 ou 39. Paul peut faire 6 rangements différents.

(c) Il manque 1 et 100 : $100 = 1 \times 100 = 2 \times 50 = 4 \times 25 = 5 \times 20 = 10 \times 10$. Diviseurs de 100 : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20 ; 25 ; 50 ; 100.

(d) Non : il s'est arrêté trop tôt, car $96 = 8 \times 12$. Diviseurs de 96 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 32 ; 48 ; 96.

Ex. 6 ★★★ Les affirmations de Lina

(a) Faux. Le critère de 4 porte sur les deux derniers chiffres : $18 = 4 \times 4 + 2$, donc 18 n'est pas divisible par 4. On a $2\,618 = 4 \times 654 + 2$: le reste n'est pas 0. 2 618 est pair mais il n'est pas divisible par 4.

(b) Faux. Le critère de 3 porte sur la somme des chiffres, pas sur le dernier chiffre : $4 + 2 + 1 + 3 = 10$, et 10 n'est pas dans la table de 3. On a $4\,213 = 3 \times 1\,404 + 1$: 4 213 n'est pas divisible par 3.

(c) Faux. Pour $12 = 3 \times 4$, il faut vérifier le critère de 3 ET celui de 4. $3 + 4 + 7 + 4 = 18$: 3 474 est divisible par 3. Mais $74 = 4 \times 18 + 2$: 3 474 n'est pas divisible par 4. On a $3\,474 = 12 \times 289 + 6$: 3 474 est divisible par 6, mais pas par 12.

Ex. 6 **(suite)**

(d) Faux. Pour $6 = 2 \times 3$, il faut vérifier les deux critères. 2 354 est pair, mais $2 + 3 + 5 + 4 = 14$ n'est pas dans la table de 3. On a $2\,354 = 6 \times 392 + 2$: 2 354 n'est pas divisible par 6.

(e) Vrai. $5 + 4 + 3 + 6 = 18$ est dans la table de 9, donc 5 436 est divisible par 9 : $5\,436 = 9 \times 604$. Comme $9 = 3 \times 3$, on a $5\,436 = 3 \times 1\,812$: 5 436 est aussi divisible par 3.
(L'inverse est faux : un multiple de 3 n'est pas toujours un multiple de 9.)

Ex. 7 ★★★ **La photo de classe**

(a) Non. $1 + 3 + 8 = 12$ est dans la table de 3 mais pas dans celle de 9.
Donc 138 est divisible par 3 mais pas par 9. Samir n'a pas raison : un multiple de 3 n'est pas toujours un multiple de 9.

(b) $138 = 9 \times 15 + 3$. Le reste vaut 3 et pas 0 : avec des rangées de 9, on a 15 rangées complètes et il reste 3 élèves. Pour compléter la dernière rangée, il faudrait ajouter $9 - 3 = 6$ élèves.

(c) $138 = 1 \times 138 = 2 \times 69 = 3 \times 46 = 6 \times 23$. Ni 4, ni 5, ni 7, 8, 9, 10 ou 11 ne conviennent ($138 = 7 \times 19 + 5$ et $138 = 11 \times 12 + 6$). Comme $12 \times 12 = 144$ dépasse 138, on peut s'arrêter. Les diviseurs de 138 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 23 ; 46 ; 69 ; 138.

(d) Le seul diviseur de 138 compris entre 10 et 30 est 23. Comme $138 = 23 \times 6$, Ben pourra faire 6 rangées de 23 élèves.

(e) $138 = 6 \times 23$. On peut donc écrire « 6 est un diviseur de 138 » ou « 138 est un multiple de 6 ». Les mots multiple et diviseur vont en sens inverse.

Ex. 8 ★★★ **Le code du cadenas**

(a) La somme des chiffres vaut $4+? + 5 = 9+?$. Elle doit être dans la table de 9, donc $? = 0$ (somme 9) ou $? = 9$ (somme 18). Les valeurs possibles sont 405 et 495.
Vérification : $405 = 9 \times 45$ et $495 = 9 \times 55$.

(b) Le chiffre des unités est 5, donc le code est impair : il n'est pas divisible par 2. Or, pour être divisible par $6 = 2 \times 3$, il faut être divisible par 2 et par 3. Le code n'est donc jamais divisible par 6, et son frère se trompe.

(c) $405 = 11 \times 36 + 9$: le reste n'est pas 0, donc 405 n'est pas divisible par 11. $495 = 11 \times 45$: le reste vaut 0. Le code est donc 495.

Ex. 8 **(suite)**

(d) Oui. 495 se termine par 5, donc il est divisible par 5. De plus, $4 + 9 + 5 = 18$ est dans la table de 3, donc il est divisible par 3. Comme $15 = 3 \times 5$, 495 est un multiple de 15 : $495 = 15 \times 33$.

2. *Nombre premier ou non ? Crible d'Ératosthène et test*

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : premier ou pas ?**

(a) 1 n'a qu'un seul diviseur : lui-même. Il n'est donc pas premier.

(b) 2. Tout autre nombre pair a au moins trois diviseurs : 1, 2 et lui-même.

(c) 1 et 37 : exactement deux diviseurs, donc 37 est premier.

(d) 1 ; 7 ; 49. Il y a trois diviseurs, donc 49 est composé.

(e) 2, 3, 5 et 7 suffisent : $7 \times 7 = 49$ ne dépasse pas 89, mais le suivant est 11, et $11 \times 11 = 121$ dépasse 89.

(f) Il y a 25 nombres premiers inférieurs à 100.

Ex. 10 ★☆☆ **Le plus petit diviseur premier**

(a) $8 + 7 = 15$ est divisible par 3, donc le plus petit diviseur premier est 3 : $87 = 3 \times 29$.

(b) Pas par 2 ni 5 ; $2 + 0 + 3 = 5$, donc pas par 3. Mais $203 = 7 \times 29$, donc c'est 7.

(c) Pas par 2, 3 ($1 + 4 + 3 = 8$) ni 5 ; $143 = 7 \times 20 + 3$. Mais $143 = 11 \times 13$, donc c'est 11.

(d) Pas par 2, 3 ($1 + 6 + 1 = 8$) ni 5. Mais $161 = 7 \times 23$, donc c'est 7.

(e) Pas par 2, 3 ($2 + 0 + 9 = 11$) ni 5 ; $209 = 7 \times 29 + 6$. Mais $209 = 11 \times 19$, donc c'est 11.

(f) Pas par 2, 3 ($2 + 4 + 7 = 13$) ni 5 ; $247 = 7 \times 35 + 2$ et $247 = 11 \times 22 + 5$. Mais $247 = 13 \times 19$, donc c'est 13.

Ex. 11 ★★☆ **Le crible de Lina**

(a) Elle barre 1 : il n'a qu'un seul diviseur, donc il n'est pas premier.

(b) $49 = 7 \times 7$ n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5 : c'est le plus petit nombre composé encore non barré.

(c) Le nombre suivant non barré est 11, et $11 \times 11 = 121$ dépasse 100. Les multiples de 11 jusqu'à 100 sont déjà barrés, donc elle peut s'arrêter.

(d) Non : $91 = 7 \times 13$. Il sera barré avec les multiples de 7, donc 91 n'est pas premier.

Ex. 11 **(suite)**

(e) Les nombres pairs et 95 sont barrés, et aussi $91 = 7 \times 13$, $93 = 3 \times 31$ et $99 = 3 \times 33$. Il ne reste qu'un seul nombre : 97.

Ex. 12 ★★☆ **Tester jusqu'au bout**

(a) 101 est impair ; $1 + 0 + 1 = 2$, donc pas par 3 ; il ne se termine ni par 0 ni par 5 ; $101 = 7 \times 14 + 3$. Comme $11 \times 11 = 121$ dépasse 101, on s'arrête : 101 est premier.

(b) 299 n'est divisible ni par 2, ni par 3 ($2 + 9 + 9 = 20$), ni par 5 ; $299 = 7 \times 42 + 5$ et $299 = 11 \times 27 + 2$. Mais $299 = 13 \times 23$: 299 n'est pas premier.

(c) Ces produits augmentent : $13 \times 17 = 221$ est trop petit, $17 \times 19 = 323$ est compris entre 300 et 350, et $19 \times 23 = 437$ est trop grand. La réponse est 323.

(d) $121 = 11 \times 11$; 122, 124 et 126 sont pairs ; $123 = 3 \times 41$; $125 = 5 \times 25$. Pour 127 : il est impair, $1 + 2 + 7 = 10$, il ne se termine ni par 0 ni par 5, $127 = 7 \times 18 + 1$, $127 = 11 \times 11 + 6$, et $13 \times 13 = 169$ dépasse 127. La réponse est donc 127.

Ex. 13 ★★☆ **Vrai ou faux ?**

(a) Faux : 35 est impair, mais $35 = 5 \times 7$, donc il n'est pas premier.

(b) Faux : $2 \times 7 = 14$ a pour diviseurs 1, 2, 7 et 14. Il a quatre diviseurs, donc il n'est pas premier.

(c) Vrai : il est divisible par 1, par lui-même et par au moins un autre nombre. Par exemple, 22 a pour diviseurs 1, 2, 11 et 22.

(d) Faux : 5 est premier et se termine par 5. Tous les autres nombres qui se terminent par 5 sont divisibles par 5.

(e) Faux : $5 + 7 = 12$ est divisible par 3, donc $57 = 3 \times 19$ n'est pas premier. Il fallait essayer 3.

Ex. 14 ★★★ **L'erreur de Noé**

(a) 221 est impair, donc il n'est pas divisible par 2. $2 + 2 + 1 = 5$ n'est pas un multiple de 3, donc pas divisible par 3. Il se termine par 1, donc pas divisible par 5. $221 = 7 \times 31 + 4$ et $221 = 11 \times 20 + 1$: les restes ne sont pas nuls.

(b) $11 \times 11 = 121$ ne dépasse pas 221. Noé doit donc continuer avec le nombre premier suivant, 13. Il ne peut s'arrêter que lorsque le carré du nombre essayé dépasse 221.

Ex. 14 **(suite)**

(c) $221 \div 13 : 13 \times 17 = 221$, il reste 0.
Donc $221 = 13 \times 17$: 221 a au moins trois diviseurs (1, 13, 17 et 221). 221 n'est pas premier, c'est un nombre composé.

(d) Non, elle n'a pas raison. 113 est impair. $1 + 1 + 3 = 5$, donc il n'est pas divisible par 3. Il ne se termine ni par 0 ni par 5. $113 = 7 \times 16 + 1$. Le premier suivant est 11, et $11 \times 11 = 121$ dépasse 113 : on s'arrête après 7, sans essayer 11 ni 13. 113 est premier.

Ex. 15 ★★★ **Les cartes de Malik**

(a) 1 n'a qu'un seul diviseur : il n'est pas premier. 2 a exactement deux diviseurs, 1 et 2 : il est premier. $9 = 3 \times 3$, $15 = 3 \times 5$ et $39 = 3 \times 13$ ne sont pas premiers. 17 et 23 sont impairs et ne sont pas divisibles par 3 ($1 + 7 = 8$, $2 + 3 = 5$) ; comme $5 \times 5 = 25$ dépasse 23, on s'arrête. Les cartes premières sont 2, 17 et 23.

(b) $17 + 23 = 40 = 2 \times 20$: 40 est divisible par 2, donc il n'est pas premier. La somme de deux nombres impairs est toujours paire, et elle est plus grande que 2. Or 2 est le seul nombre premier pair : cette somme n'est donc jamais première.

(c) Paires possibles : $2 + 17 = 19$, qui est premier ; $2 + 23 = 25 = 5 \times 5$, qui n'est pas premier ; $17 + 23 = 40$, qui n'est pas premier. Une seule paire convient : 2 et 17.

(d) Le nombre doit être impair et ne pas se terminer par 5 : il reste 71, 73, 77, 79. $77 = 7 \times 11$ n'est pas premier. 71, 73, 79 ne sont divisibles ni par 3 (8, 10, 16), ni par 7 ($71 = 7 \times 10 + 1$, $73 = 7 \times 10 + 3$, $79 = 7 \times 11 + 2$), et $11 \times 11 = 121$ dépasse 79. Les chiffres possibles sont 1, 3 et 9.

Ex. 16 ★★★ **Le crible d'Inès jusqu'à 200**

(a) $13 \times 13 = 169$ ne dépasse pas 200, mais $17 \times 17 = 289$ dépasse 200. Inès barre les multiples de 2, 3, 5, 7, 11 et 13, puis elle s'arrête après 13.

(b) Non. $133 = 7 \times 19$ est barré avec les multiples de 7. Pour les autres, on essaie 2, 3, 5, 7, 11 (car $13 \times 13 = 169$ dépasse 139) : $131 = 7 \times 18 + 5 = 11 \times 11 + 10$; $137 = 7 \times 19 + 4 = 11 \times 12 + 5$; $139 = 7 \times 19 + 6 = 11 \times 12 + 7$, et leurs sommes de chiffres 5, 11, 13 ne sont pas des multiples de 3. 131, 137 et 139 sont premiers, mais pas 133.

Ex. 16 **(suite)**

(c) Entre 180 et 190, le seul multiple de 11 est $187 = 11 \times 17$. 187 est impair, $1 + 8 + 7 = 16$ n'est pas un multiple de 3, il ne se termine ni par 0 ni par 5, $187 = 7 \times 26 + 5$ et $187 = 13 \times 14 + 5$. Aucun autre nombre premier ne le barre : 187 reste non barré par erreur.

(d) 193 est impair. $1 + 9 + 3 = 13$, donc il n'est pas divisible par 3. Il ne se termine ni par 0 ni par 5. $193 = 7 \times 27 + 4$, $193 = 11 \times 17 + 6$ et $193 = 13 \times 14 + 11$. Le premier suivant est 17, et $17 \times 17 = 289$ dépasse 193 : on s'arrête. 193 est premier.

3. *Décomposer en produit de facteurs premiers*

Ex. 17 ★☆☆ **Divisions successives**

(a) $76 \div 2 = 38$; $38 \div 2 = 19$; $19 \div 19 = 1$.
Donc $76 = 2^2 \times 19$. Vérification : $4 \times 19 = 76$.

(b) $126 \div 2 = 63$; $63 \div 3 = 21$; $21 \div 3 = 7$; $7 \div 7 = 1$.
Donc $126 = 2 \times 3^2 \times 7$. Vérification : $2 \times 9 \times 7 = 126$.

(c) $220 \div 2 = 110$; $110 \div 2 = 55$; $55 \div 5 = 11$; $11 \div 11 = 1$.
Donc $220 = 2^2 \times 5 \times 11$. Vérification : $4 \times 5 \times 11 = 220$.

(d) $315 \div 3 = 105$; $105 \div 3 = 35$; $35 \div 5 = 7$; $7 \div 7 = 1$.
Donc $315 = 3^2 \times 5 \times 7$. Vérification : $9 \times 5 \times 7 = 315$.

(e) $832 \div 2 = 416$; $416 \div 2 = 208$; $208 \div 2 = 104$; $104 \div 2 = 52$; $52 \div 2 = 26$; $26 \div 2 = 13$; $13 \div 13 = 1$.
Donc $832 = 2^6 \times 13$. Vérification : $64 \times 13 = 832$.

(f) $374 \div 2 = 187$. 187 n'est divisible ni par 3 ($1 + 8 + 7 = 16$), ni par 5, ni par 7 (reste 5). $187 \div 11 = 17$; $17 \div 17 = 1$.
Donc $374 = 2 \times 11 \times 17$. Vérification : $2 \times 187 = 374$.

Ex. 18 ★☆☆ **Retrouver le nombre**

(a) $2^4 = 16$, donc $16 \times 3 = 48$.

(b) $3^3 = 27$, donc $27 \times 5 = 135$.

(c) $2^5 = 32$ (et non 2×5), donc $32 \times 7 = 224$.

(d) $2 \times 3 \times 5 = 30$, donc $30 \times 11 = 330$.

(e) $4 \times 9 = 36$, donc $36 \times 13 = 468$.

(f) $7^2 = 49$, donc $49 \times 11 = 539$.

Ex. 19 ★★☆ **Premier ou produit caché ?**

(a) 97 n'est divisible ni par 2, ni par 3 ($9 + 7 = 16$), ni par 5, ni par 7 (reste 6). Or $11 \times 11 = 121 > 97$.
Donc 97 est premier : sa décomposition est 97.

(b) 91 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, mais $91 \div 7 = 13$.
Donc $91 = 7 \times 13$: il n'est pas premier.

(c) 209 n'est divisible ni par 2, ni par 3 ($2 + 0 + 9 = 11$), ni par 5, ni par 7 (reste 6). $209 \div 11 = 19$.
Donc $209 = 11 \times 19$: il n'est pas premier.

(d) 113 n'est divisible ni par 2, ni par 3 ($1 + 1 + 3 = 5$), ni par 5, ni par 7 (reste 1). Or $11 \times 11 = 121 > 113$.
Donc 113 est premier : sa décomposition est 113.

(e) 247 n'est divisible ni par 2, ni par 3 ($2 + 4 + 7 = 13$), ni par 5, ni par 7 (reste 2), ni par 11 (reste 5).
$247 \div 13 = 19$.
Donc $247 = 13 \times 19$: il n'est pas premier.

Ex. 20 ★★☆ **Décompositions d'élèves**

(a) Faux : 9 n'est pas premier ($9 = 3^2$), la décomposition n'est pas finie. On range dans l'ordre croissant : $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$. Vérification : $4 \times 9 \times 5 = 180$.

(b) Faux : $4 \times 27 = 108$, pas 72, les exposants sont inversés. $72 \div 2 = 36$; $36 \div 2 = 18$; $18 \div 2 = 9$; $9 \div 3 = 3$; $3 \div 3 = 1$.
Donc $72 = 2^3 \times 3^2$
($8 \times 9 = 72$).

(c) Faux : 1 n'apparaît jamais dans une décomposition, et 25 n'est pas premier ($25 = 5^2$). Dans l'ordre croissant : $350 = 2 \times 5^2 \times 7$. Vérification : $2 \times 25 \times 7 = 350$.

(d) Faux : 15 n'est pas premier ($15 = 3 \times 5$), et les facteurs ne sont pas rangés.
Donc $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$. Vérification : $6 \times 35 = 210$.

Ex. 21 ★★☆ **Partir d'un produit connu**

(a) $36 = 2^2 \times 3^2$ et $35 = 5 \times 7$.
Donc $1\,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$. Vérification : $36 \times 35 = 1\,260$.

(b) $28 = 2^2 \times 7$ et $45 = 3^2 \times 5$, donc $1\,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$. Oui, c'est le même résultat : la décomposition est unique.

(c) $14 = 2 \times 7$ et $100 = 2^2 \times 5^2$. Comme $2 \times 2^2 = 2^3$, on range dans l'ordre croissant : $1\,400 = 2^3 \times 5^2 \times 7$.
Vérification : $8 \times 25 \times 7 = 1\,400$.

Ex. 21 (suite)

(d) $40 = 2^3 \times 5$.
Donc $1\,600 = 40 \times 40 = 2^3 \times 2^3 \times 5 \times 5 = 2^6 \times 5^2$.
Vérification : $64 \times 25 = 1\,600$. Les exposants 6 et 2 sont pairs : chaque exposant de 40 est doublé.

(e) Non : $2^4 \times 3^3 = 16 \times 27 = 432$ et l'exposant 3 est impair. D'ailleurs $20 \times 20 = 400$ et $21 \times 21 = 441$: 432 n'est pas le carré d'un nombre entier.

Ex. 22 ★★★ **Carreaux en carré**

(a) $784 \div 2 = 392$; $392 \div 2 = 196$; $196 \div 2 = 98$; $98 \div 2 = 49$; 49 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5 : $49 \div 7 = 7$; $7 \div 7 = 1$.
Donc $784 = 2^4 \times 7^2$. Vérification : $16 \times 49 = 784$.

(b) Les exposants 4 et 2 sont pairs : on partage chaque facteur en deux moitiés égales. $784 = (2^2 \times 7) \times (2^2 \times 7) = 28 \times 28$. Hugo met 28 carreaux sur chaque côté.

(c) $1\,176 \div 2 = 588$; $588 \div 2 = 294$; $294 \div 2 = 147$; $147 \div 3 = 49$; $49 \div 7 = 7$; $7 \div 7 = 1$.
Donc $1\,176 = 2^3 \times 3 \times 7^2$ (vérification : $8 \times 3 \times 49 = 1\,176$). L'exposant de 2 (3) et celui de 3 (1) sont impairs, donc 1 176 n'est pas un carré : Clara ne peut pas former son carré.

(d) Pour que tous les exposants soient pairs, il manque un facteur 2 et un facteur 3 : on multiplie par $2 \times 3 = 6$. Il faut donc 6 boîtes en tout, soit $1\,176 \times 6 = 7\,056 = 2^4 \times 3^2 \times 7^2$ carreaux. Côté : $2^2 \times 3 \times 7 = 84$ carreaux, car $84 \times 84 = 7\,056$.

Ex. 23 ★★★ **Ils ont l'air premiers**

(a) 1 547 se termine par 7 : il n'est divisible ni par 2 ni par 5. $1 + 5 + 4 + 7 = 17$, qui n'est pas un multiple de 3 : il n'est pas divisible par 3. Mais Noé a tort de conclure : il faut aussi tester 7, 11, 13… Or $1\,547 = 7 \times 221$, donc 1 547 est un nombre composé.

(b) $1\,547 \div 7 = 221$. 221 n'est pas divisible par 7 ($221 = 7 \times 31 + 4$) ni par 11 ($221 = 11 \times 20 + 1$) ; $221 \div 13 = 17$; $17 \div 17 = 1$.
Donc $1\,547 = 7 \times 13 \times 17$. Vérification : $7 \times 13 = 91$ et $91 \times 17 = 1\,547$.

(c) 143 a l'air premier mais ne l'est pas : $143 \div 11 = 13$, donc $143 = 11 \times 13$. Tous les facteurs d'une décomposition doivent être premiers, donc Zoé doit continuer.

(d) $1\,859 = 13 \times 11 \times 13$. On range dans l'ordre croissant et on regroupe : $1\,859 = 11 \times 13^2$. Vérification : $13^2 = 169$ et $11 \times 169 = 1\,859$.

Ex. 24 ★★★ **Deux chemins, une seule décomposition**

(a) $24 = 2^3 \times 3$ et $45 = 3^2 \times 5$.
Donc $1\,080 = 2^3 \times 3 \times 3^2 \times 5 = 2^3 \times 3^3 \times 5$.
Vérification : $8 \times 27 \times 5 = 1\,080$.

(b) $30 = 2 \times 3 \times 5$ et $36 = 2^2 \times 3^2$.
Donc $1\,080 = 2 \times 2^2 \times 3 \times 3^2 \times 5 = 2^3 \times 3^3 \times 5$. C'est la même décomposition que celle d'Inès : la décomposition en produit de facteurs premiers est unique, quel que soit le chemin choisi.

(c) Produit de Léo : $2 \times 3 \times 27 \times 5 = 810$, et non 1 080. Il a écrit $2 \times 2 \times 2$ comme « 2×3 » : l'exposant compte les facteurs, donc $2 \times 2 \times 2 = 2^3$. La bonne écriture est $1\,080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$.

(d) $12 = 2^2 \times 3$, donc $12\,960 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 2^2 \times 3 = 2^5 \times 3^4 \times 5$. Vérification : $32 \times 81 = 2\,592$ et $2\,592 \times 5 = 12\,960$.

4. *Simplifier une fraction grâce à la décomposition*

Ex. 25 ★☆☆ **Simplifier une fraction déjà décomposée**

(a) Facteurs communs : un 2 et un 3. Il reste 2×7 en haut et 3 en bas : $\frac{14}{3}$.

(b) Facteurs communs : un 3 et le 5. Il ne reste rien en haut, donc 1 ; en bas il reste 3×7 : $\frac{1}{21}$.

(c) Facteurs communs : 2^2 et 3. Il reste 2^2 en haut et 11 en bas : $\frac{4}{11}$.

(d) Facteur commun : 5^2. Il reste 13 en haut et 2×5 en bas : $\frac{13}{10}$.

(e) Facteurs communs : un 3 et un 7. Il reste 2×3^2 en haut et 7 en bas : $\frac{18}{7}$.

(f) Tout le numérateur disparaît : il reste 1 en haut (pas 0) et 13 en bas : $\frac{1}{13}$.

Ex. 26 ★☆☆ **Le facteur qui manque**

(a) $12 = 2^2 \times 3$ et $132 = 2^2 \times 3 \times 11$: il manque 11.
$\frac{5 \times 11}{12 \times 11} = \frac{55}{132}$.

(b) $15 = 3 \times 5$ et $195 = 3 \times 5 \times 13$: il manque 13.
$\frac{4 \times 13}{15 \times 13} = \frac{52}{195}$.

(c) $14 = 2 \times 7$ et $238 = 2 \times 7 \times 17$: il manque 17.
$\frac{11 \times 17}{14 \times 17} = \frac{187}{238}$.

(d) $21 = 3 \times 7$ et $189 = 3^3 \times 7$: il manque $3^2 = 9$.
$\frac{4 \times 9}{21 \times 9} = \frac{36}{189}$.

Ex. 26 **(suite)**

(e) $57 = 3 \times 19$: le numérateur 3 a été multiplié par 19, donc le dénominateur aussi. $\frac{3\times19}{8\times19} = \frac{57}{152}$.

(f) $91 = 7 \times 13$: le numérateur 13 a été multiplié par 7, donc le dénominateur aussi. $\frac{13\times7}{24\times7} = \frac{91}{168}$.

Ex. 27 ★★☆ **Décomposer pour rendre irréductible**

(a) $78 = 2 \times 3 \times 13$ et $234 = 2 \times 3^2 \times 13$. On supprime 2, un 3 et 13 : en haut il reste 1, en bas il reste 3.
Donc $\frac{78}{234} = \frac{1}{3}$.

(b) $270 = 2 \times 3^3 \times 5$ et $756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$. On supprime un 2 et 3^3 : il reste 5 en haut, 2×7 en bas.
Donc $\frac{270}{756} = \frac{5}{14}$.

(c) $605 = 5 \times 11^2$ et $220 = 2^2 \times 5 \times 11$. On supprime 5 et un seul 11 : il reste 11 en haut, 2^2 en bas.
Donc $\frac{605}{220} = \frac{11}{4}$.

(d) $462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$ et $1\,155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11$. On supprime 3, 7 et 11 : il reste 2 en haut, 5 en bas.
Donc $\frac{462}{1\,155} = \frac{2}{5}$.

(e) $912 = 2^4 \times 3 \times 19$ et $1\,368 = 2^3 \times 3^2 \times 19$. On supprime 2^3, un 3 et 19 : il reste 2 en haut, 3 en bas.
Donc $\frac{912}{1\,368} = \frac{2}{3}$.

Ex. 28 ★★☆ **Quatre simplifications à vérifier**

(a) Non : on ne barre jamais des chiffres. $39 = 3 \times 13$, donc $\frac{13}{39} = \frac{13}{3\times13} = \frac{1}{3}$, et $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{9}$.

(b) Non : il y a 2^3 en haut et un seul 2 en bas, donc on ne supprime qu'un 2. Il reste 2^2 en haut : $\frac{2^3\times7}{2\times7\times13} = \frac{4}{13}$.

(c) Oui : il y a un 2 et un 3 en haut, 2^2 et 3^2 en bas. On supprime un seul 2 et un seul 3 : il reste 11 en haut et $2 \times 3 = 6$ en bas. $\frac{11}{6}$ est irréductible car 11 n'est pas un facteur de 6.

(d) Non : $15 = 3 \times 5$ et $27 = 3^3$ ont encore le facteur 3 en commun. Il fallait continuer : $\frac{15}{27} = \frac{5}{3^2} = \frac{5}{9}$, donc $\frac{60}{108} = \frac{5}{9}$.

Ex. 29 ★★☆ **Fractions égales et dénominateur commun**

(a) Vrai : $\frac{133}{209} = \frac{7\times19}{11\times19} = \frac{7}{11}$ et $\frac{91}{143} = \frac{7\times13}{11\times13} = \frac{7}{11}$. Elles ont la même forme irréductible.

(b) Faux : $\frac{84}{120} = \frac{2^2\times3\times7}{2^3\times3\times5} = \frac{7}{10}$ et $\frac{105}{147} = \frac{3\times5\times7}{3\times7^2} = \frac{5}{7}$. Les formes irréductibles sont différentes.

(c) $18 = 2 \times 3^2$ et $24 = 2^3 \times 3$. Je prends chaque facteur avec son plus grand exposant : $2^3 \times 3^2 = 72$. $\frac{5\times4}{18\times4} = \frac{20}{72}$ et $\frac{7\times3}{24\times3} = \frac{21}{72}$.

Ex. 29 **(suite)**

(d) $20 = 2^2 \times 5$ et $45 = 3^2 \times 5$. Dénominateur commun : $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$. $\frac{3\times9}{20\times9} = \frac{27}{180}$ et $\frac{7\times4}{45\times4} = \frac{28}{180}$.

Ex. 30 ★★★ **Tom s'arrête trop tôt**

(a) $42 = 2 \times 3 \times 7$ et $63 = 3^2 \times 7$ ont encore les facteurs premiers 3 et 7 en commun : $\frac{42}{63}$ n'est pas irréductible, Tom s'est arrêté trop tôt. En supprimant 3 et 7 : $\frac{42}{63} = \frac{2}{3}$.

(b) $840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$ et $1\,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$. Il y a 2 deux fois des deux côtés (il en reste un en haut), 3 une fois des deux côtés (il en reste un en bas), puis 5 et 7. Il reste $\frac{2}{3}$, qui est irréductible.

(c) On a supprimé $2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$ en haut et en bas. Il fallait diviser directement par 420 : $840 \div 420 = 2$ et $1\,260 \div 420 = 3$.

(d) Non. $70 = 2 \times 5 \times 7$ et $1\,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$. On supprime 2, 5 et 7 : il reste 1 en haut (pas 0) et $2 \times 3^2 = 18$ en bas. $\frac{70}{1\,260} = \frac{1}{18}$.

Ex. 31 ★★★ **L'astuce de Hugo**

(a) $16 = 2^4$ et $64 = 2^6$. Le facteur 2 est quatre fois des deux côtés : il en reste deux en bas. $\frac{16}{64} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$. Le résultat est juste, mais par hasard : barrer des chiffres n'est pas une méthode.

(b) Non. $34 = 2 \times 17$ et $48 = 2^4 \times 3$. Seul un facteur 2 est commun : $\frac{34}{48} = \frac{17}{2^3\times3} = \frac{17}{24}$. Or $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$, et $\frac{9}{24}$ n'est pas égale à $\frac{17}{24}$: barrer les chiffres a donné une fraction fausse.

(c) $5 + 9 = 14$ et $5 + 16 = 21$. $14 = 2 \times 7$ et $21 = 3 \times 7$, d'où $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$. Or $\frac{2}{3}$ n'est pas égale à $\frac{9}{16}$: on ne barre jamais les termes d'une somme.

(d) Ici, 5 est un facteur en haut ET en bas : le supprimer, c'est diviser le numérateur et le dénominateur par 5, ce qui ne change pas la fraction. On obtient $\frac{9}{16}$, irréductible car $9 = 3^2$ et $16 = 2^4$ n'ont aucun facteur premier commun.

Ex. 32 ★★★ **La plus forte proportion à la cantine**

(a) $98 = 2 \times 7^2$ et $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$: on supprime 2×7, d'où $\frac{98}{252} = \frac{7}{18}$. $119 = 7 \times 17$ et $306 = 2 \times 3^2 \times 17$: on supprime 17, d'où $\frac{119}{306} = \frac{7}{18}$. Les deux fractions ont la même forme irréductible : A et B ont la même proportion.

(b) $65 = 5 \times 13$ et $156 = 2^2 \times 3 \times 13$. Seul 13 est commun : $\frac{65}{156} = \frac{5}{12}$, irréductible.

Ex. 32 **(suite)**

(c) $18 = 2 \times 3^2$ et $12 = 2^2 \times 3$. Le plus petit dénominateur commun prend chaque facteur avec son plus grand exposant : $2^2 \times 3^2 = 36$ (Lucas trouve 216, qui convient mais n'est pas le plus petit). $\frac{7}{18} = \frac{14}{36}$ et $\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$: c'est le collège C qui a la plus grande proportion.

(d) $12 = 2^2 \times 3$ et $228 = 2^2 \times 3 \times 19$: il manque le facteur 19. $\frac{5}{12} = \frac{5 \times 19}{12 \times 19} = \frac{95}{228}$. Au collège D, 95 élèves mangent à la cantine.

5. *Diviseurs communs et multiples communs*

Ex. 33 ★☆☆ **Lire les diviseurs sur la décomposition**

(a) $12 = 2^2 \times 3$: il faut deux facteurs 2 (600 en a trois) et un facteur 3. Oui : $600 = 12 \times 50$.

(b) Faux. $9 = 3^2$: il faut deux facteurs 3, et 600 n'en a qu'un. D'ailleurs, le reste de la division de 600 par 9 vaut 6.

(c) $40 = 2^3 \times 5$: ses facteurs sont tous dans 600, avec un exposant suffisant.
Donc 40 est un diviseur de 600 ($600 = 40 \times 15$). $250 = 2 \times 5^3$ demande trois facteurs 5, et 600 n'en a que deux. Donc 250 n'est pas un diviseur de 600
(le reste vaut 100).

(d) $16 = 2^4$ et 600 n'a que trois facteurs 2 : il en manque un. Il faut multiplier par 2. On obtient $1\,200 = 2^4 \times 3 \times 5^2 = 16 \times 75$.

(e) $75 = 3 \times 5^2$: un facteur 3 et deux facteurs 5, ils sont tous dans 600. Oui : $600 = 75 \times 8$.

(f) $45 = 3^2 \times 5$: il faut deux facteurs 3, et 600 n'en a qu'un. Avoir les facteurs 3 et 5 ne suffit pas : 45 n'est pas un diviseur de 600
(le reste vaut 15).

Ex. 34 ★☆☆ **Diviseur commun et multiple commun en ligne**

(a) Facteurs communs 3 et 7, avec le plus petit exposant : $3 \times 7 = 21$.

(b) Tous les facteurs, avec le plus grand exposant : $2^3 \times 3^2 \times 7 = 504$.

(c) Les diviseurs communs sont les diviseurs de $3 \times 5 = 15$ (facteurs communs, avec le plus petit exposant) : 1 ; 3 ; 5 ; 15.

(d) Tous les facteurs, avec le plus grand exposant : $2^2 \times 5^2 \times 13 = 1\,300$.

Ex. 34 **(suite)**

(e) Aucun facteur premier commun : le plus grand diviseur commun de 48 et 35 est 1.

(f) $2^3 \times 11 = 88$ a trois facteurs 2, alors que $2^2 \times 11 = 44$ n'en a que deux.
Donc N contient 2^3. N est aussi un diviseur de 88, donc N vaut 8 ou 88. Comme N est plus petit que 88, $N = 8$.

Ex. 35 ★★☆ **Comparer des listes de diviseurs**

(a) Diviseurs de 24 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24. Diviseurs de 42 : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 ; 42.

(b) Les diviseurs communs sont 1, 2, 3 et 6. Le plus grand diviseur commun de 24 et 42 est 6.

(c) Non. $39 = 3 \times 13$, donc 13 est un diviseur de 39. Et 13 est un diviseur de lui-même. Le plus grand diviseur commun de 13 et 39 est donc 13.

(d) Diviseurs de 27 : 1 ; 3 ; 9 ; 27. Diviseurs de 32 : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32. Le seul diviseur commun est 1 : le plus grand diviseur commun de 27 et 32 est 1.

Ex. 36 ★★☆ **L'erreur de Malik**

(a) $156 \div 2 = 78$, $78 \div 2 = 39$, $39 \div 3 = 13$, $13 \div 13 = 1$: $156 = 2^2 \times 3 \times 13$. $234 \div 2 = 117$, $117 \div 3 = 39$, $39 \div 3 = 13$, $13 \div 13 = 1$: $234 = 2 \times 3^2 \times 13$. Les décompositions sont justes.

(b) 468 est plus grand que 156. De plus, 468 contient deux facteurs 3, alors que 156 n'en a qu'un.
Donc 468 n'est pas un diviseur de 156.

(c) Malik a inversé les exposants. Plus grand diviseur commun : facteurs communs, plus petit exposant, $2 \times 3 \times 13 = 78$. Plus petit multiple commun : tous les facteurs, plus grand exposant, $2^2 \times 3^2 \times 13 = 468$.

(d) $156 \times 234 = 36\,504$. C'est bien un multiple commun, mais pas le plus petit : $36\,504 = 468 \times 78$, et 468 suffit.

Ex. 37 ★★☆ **Ranger 200 chaises**

(a) $200 \div 2 = 100$, $100 \div 2 = 50$, $50 \div 2 = 25$, $25 \div 5 = 5$, $5 \div 5 = 1$: $200 = 2^3 \times 5^2$.

(b) Ligne 1 : 1 ; 2 ; 4 ; 8. Ligne 5 : 5 ; 10 ; 20 ; 40. Ligne 25 : 25 ; 50 ; 100 ; 200.

(c) Le nombre de chaises par rangée doit être un diviseur de 200. Le tableau en compte $4 \times 3 = 12$, pas 5. Ben a donc 12 rangements possibles.

Ex. 37 **(suite)**

(d) Les diviseurs de 200 entre 15 et 30 sont 20 et 25. Ben peut faire 10 rangées de 20 chaises ($200 \div 20 = 10$) ou 8 rangées de 25 chaises ($200 \div 25 = 8$).

Ex. 38 ★★★ **Le carrelage d'Amel**

(a) $588 \div 2 = 294$; $294 \div 2 = 147$; $147 \div 3 = 49$; $49 \div 7 = 7$; $7 \div 7 = 1$, donc $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$. Ensuite $420 \div 2 = 210$; $210 \div 2 = 105$; $105 \div 3 = 35$; $35 \div 5 = 7$; $7 \div 7 = 1$, donc $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$.

(b) Non. $8 = 2^3$ contient trois facteurs 2, mais 588 et 420 n'en contiennent que deux (2^2).
Donc 8 n'est pas un diviseur de ces nombres. D'ailleurs $588 = 8 \times 73 + 4$: le reste vaut 4. Être pair ne suffit pas.

(c) Le côté doit être un diviseur commun de 588 et de 420. On garde les facteurs communs avec le plus petit exposant : $2^2 \times 3 \times 7 = 84$. Les plus grands carreaux mesurent 84 cm de côté. $588 \div 84 = 7$ et $420 \div 84 = 5$, il faut donc $7 \times 5 = 35$ carreaux.

(d) Un côté qui convient est un diviseur commun, donc un diviseur de $84 = 2^2 \times 3 \times 7$. Pour ce diviseur, on choisit 1, 2 ou 4 (3 choix), puis on multiplie ou non par 3 (2 choix), puis par 7 ou non (2 choix). Cela donne $3 \times 2 \times 2 = 12$ longueurs possibles (en comptant 1 cm).

Ex. 39 ★★★ **Les deux roues dentées**

(a) $40 \div 2 = 20$; $20 \div 2 = 10$; $10 \div 2 = 5$; $5 \div 5 = 1$, donc $40 = 2^3 \times 5$. $108 \div 2 = 54$; $54 \div 2 = 27$; $27 \div 3 = 9$; $9 \div 3 = 3$; $3 \div 3 = 1$, donc $108 = 2^2 \times 3^3$.

(b) Sarah a écrit $2^2 \times 3^3 \times 5 = 540$. Or $540 \div 40 = 13{,}5$: 540 n'est pas un multiple de 40, car il ne contient que 2^2 alors que 40 contient 2^3. Pour un multiple commun, il faut prendre le plus grand exposant : $2^3 \times 3^3 \times 5 = 1\,080$. Le plus petit multiple commun vaut 1 080.

(c) Les repères se retrouvent face à face tous les multiples de 1 080 dents : 1 080 ; 2 160 ; 3 240 ; 4 320. Le suivant, 5 400, dépasse 5 000. Les repères se retrouvent donc face à face 4 fois.

(d) $1\,080 \div 40 = 27$ et $1\,080 \div 108 = 10$. La roue A a fait 27 tours et la roue B a fait 10 tours.

Ex. 40 ★★★ **Les bouquets de Nora**

(a) Non. 91 n'est divisible ni par 2 (il est impair), ni par 3 ($9 + 1 = 10$), ni par 5 (il ne finit ni par 0 ni par 5). Mais $91 \div 7 = 13$: $91 = 7 \times 13$. 91 a donc au moins quatre diviseurs : c'est un nombre composé.

(b) Diviseurs de 91 : 1 ; 7 ; 13 ; 91. Diviseurs de 60 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60. Le seul diviseur commun est 1, donc leur plus grand diviseur commun vaut 1. Nora ne peut faire qu'un seul bouquet avec toutes ses fleurs.

(c) Elle a $91 + 14 = 105$ roses, et $105 = 3 \times 5 \times 7$. De plus, $60 = 2^2 \times 3 \times 5$. On garde les facteurs communs avec le plus petit exposant : $3 \times 5 = 15$. Elle peut faire au plus 15 bouquets. Chacun contient $105 \div 15 = 7$ roses et $60 \div 15 = 4$ tulipes.

(d) Oui. Le nombre de bouquets doit être un diviseur de 19, donc il ne peut pas dépasser 19. Or 19 est un diviseur de lui-même, et aussi de 57 puisque $57 = 19 \times 3$. Le plus grand diviseur commun est donc 19. Elle fait 19 bouquets, avec 3 marguerites et 1 pivoine dans chacun.

6. *Problèmes*

Ex. 41 ★☆☆ **Diviseur commun ou multiple commun ?**

(a) On partage sans reste, donc diviseur commun : $48 = 2^4 \times 3$ et $36 = 2^2 \times 3^2$, d'où $2^2 \times 3 = 12$. Léa fait 12 bouquets au maximum.

(b) Elles se retrouvent, donc multiple commun : $10 = 2 \times 5$ et $15 = 3 \times 5$, d'où $2 \times 3 \times 5 = 30$. Elles sonnent de nouveau ensemble dans 30 min.

(c) Les hauteurs sont des multiples de 6 et de 8, donc multiple commun : $6 = 2 \times 3$ et $8 = 2^3$, d'où $2^3 \times 3 = 24$. La plus petite hauteur commune est 24 cm.

(d) Carrés les plus grands possibles, donc diviseur commun : $70 = 2 \times 5 \times 7$ et $50 = 2 \times 5^2$, d'où $2 \times 5 = 10$. Le côté d'un carré est 10 cm.

(e) Ils se retrouvent, donc multiple commun : $25 = 5^2$ et $35 = 5 \times 7$, d'où $5^2 \times 7 = 175$. Ils s'allument de nouveau ensemble dans 175 s.

(f) On coupe sans reste, donc diviseur commun : $45 = 3^2 \times 5$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, d'où $3 \times 5 = 15$. Un morceau mesure 15 m.

Ex. 42 ★☆☆ **Calculs en ligne avec les décompositions**

(a) Facteurs communs 2 et 3, plus petit exposant : $2 \times 3 = 6$.

(b) Tous les facteurs, plus grand exposant : $2^2 \times 5 \times 11 = 220$.

(c) $52 = 2^2 \times 13$ et $78 = 2 \times 3 \times 13$, donc $2^2 \times 3 \times 13 = 156$
(et non $52 \times 78 = 4\,056$, qui n'est pas le plus petit).

(d) Facteurs communs 3 et 7, plus petit exposant : $3^2 \times 7 = 63$.

(e) Tous les facteurs, plus grand exposant : $2^3 \times 5^2 \times 7 = 1\,400$.

(f) $110 = 2 \times 5 \times 11$ et $154 = 2 \times 7 \times 11$, donc $2 \times 11 = 22$ (5 et 7 ne sont pas communs).

Ex. 43 ★★☆ **Les sachets d'Inès**

(a) $126 = 2 \times 3^2 \times 7$ et $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$.

(b) $12 = 2^2 \times 3$ contient deux facteurs 2, mais 126 n'en contient qu'un : 12 n'est pas un diviseur de 126 ($126 = 12 \times 10 + 6$). Inès ne peut pas faire 12 sachets.

(c) Le nombre de sachets doit diviser 126 et 210. Les facteurs communs sont $2 \times 3 \times 7 = 42$, donc les diviseurs communs sont ceux de 42 : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 ; 42.

(d) Le plus grand est 42. $126 \div 42 = 3$ et $210 \div 42 = 5$. Inès fait au maximum 42 sachets, contenant chacun 3 bonbons au citron et 5 bonbons à la fraise.

Ex. 44 ★★☆ **Deux lignes de bus**

(a) $24 = 2^3 \times 3$ et $40 = 2^3 \times 5$.

(b) 960 est bien un multiple commun, mais pas le plus petit : tous les facteurs avec le plus grand exposant donnent $2^3 \times 3 \times 5 = 120$. Lucas a tort, 960 min ne donne pas le premier départ commun.

(c) Le plus petit multiple commun est 120 : 120 min = 2 h. Ils repartent ensemble au bout de 2 h.

(d) 7 h 15 + 2 h = 9 h 15. Le premier départ commun a lieu à 9 h 15.

(e) Les départs communs ont lieu toutes les 2 h : 9 h 15 ; 11 h 15 ; 13 h 15 ; 15 h 15 ; 17 h 15 ; 19 h 15 ; le suivant, 21 h 15, est trop tard. Le dernier départ commun est à 19 h 15.

Ex. 45 ★★☆ **Les cartes de Nora**

(a) $7 \times 15 = 105$, puis 112 ; 119 ; 126 ; 133 ; 140 ; $147 = 7 \times 21$.

(b) $105 = 4 \times 26 + 1$; $112 = 4 \times 28 + 0$; $119 = 4 \times 29 + 3$; $126 = 4 \times 31 + 2$; $133 = 4 \times 33 + 1$; $140 = 4 \times 35 + 0$; $147 = 4 \times 36 + 3$. Seuls 105 et 133 conviennent.

(c) $1 + 0 + 5 = 6$ est un multiple de 3, donc 105 est divisible par 3 ; $1 + 3 + 3 = 7$ ne l'est pas. Nora a 133 cartes.

(d) $133 = 7 \times 19$: 133 a d'autres diviseurs que 1 et lui-même. Maxime a tort, 133 est un nombre composé.

Ex. 46 ★★★ **Le carrelage de la salle de bains**

(a) Divisions successives : $432 \div 2 = 216$; $216 \div 2 = 108$; $108 \div 2 = 54$; $54 \div 2 = 27$; $27 \div 3 = 9$; $9 \div 3 = 3$; $3 \div 3 = 1$.
Donc $432 = 2^4 \times 3^3$. De même, $336 \div 2 = 168$; $168 \div 2 = 84$; $84 \div 2 = 42$; $42 \div 2 = 21$; $21 \div 3 = 7$; $7 \div 7 = 1$.
Donc $336 = 2^4 \times 3 \times 7$.

(b) Le côté doit être un diviseur de 432 et un diviseur de 336. Facteurs communs avec le plus petit exposant : $2^4 \times 3 = 48$. Les diviseurs communs sont donc les diviseurs de 48 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48. Entre 10 et 30, Ben peut choisir des dalles de 12 cm, de 16 cm ou de 24 cm.

(c) Le plus grand diviseur commun de 432 et 336 est 48 : les dalles ont 48 cm de côté. On a $432 \div 48 = 9$ et $336 \div 48 = 7$, donc il faut $9 \times 7 = 63$ dalles. Ben doit acheter 63 dalles de 48 cm de côté.

(d) Non. $36 = 2^2 \times 3^2$ contient deux facteurs 3, mais $336 = 2^4 \times 3 \times 7$ n'en a qu'un : 36 n'est pas un diviseur de 336 ($336 = 36 \times 9 + 12$, il reste 12). Le côté doit diviser les deux dimensions, donc les dalles de 36 cm ne conviennent pas.

Ex. 47 ★★★ **Les deux ferries**

(a) 1 h 30 min = 60 min + 30 min = 90 min. $54 \div 2 = 27$; $27 \div 3 = 9$; $9 \div 3 = 3$; $3 \div 3 = 1$, donc $54 = 2 \times 3^3$. $90 \div 2 = 45$; $45 \div 3 = 15$; $15 \div 3 = 5$; $5 \div 5 = 1$, donc $90 = 2 \times 3^2 \times 5$.

(b) On cherche le plus petit multiple commun de 54 et 90 : tous les facteurs, avec le plus grand exposant, $2 \times 3^3 \times 5 = 270$. Or $270 = 4 \times 60 + 30$. Ils repartent ensemble au bout de 270 min, soit 4 h 30 min.

Ex. 47 **(suite)**

(c) $6\text{ h }40 + 4\text{ h }30\text{ min} = 10\text{ h }70\text{ min} = 11\text{ h }10$. Le premier départ commun suivant a lieu à 11 h 10.

(d) $2\text{ h }15\text{ min} = 120\text{ min} + 15\text{ min} = 135\text{ min}$. $135 \div 3 = 45$; $45 \div 3 = 15$; $15 \div 3 = 5$; $5 \div 5 = 1$, donc $135 = 3^3 \times 5$. Or $270 = 2 \times 3^3 \times 5 = 2 \times 135$: 270 est un multiple de 135. Oui, le ferry C part aussi avec A et B à 11 h 10.

(e) Les départs communs ont lieu toutes les 4 h 30 min : 6 h 40 ; 11 h 10 ; 15 h 40 ; puis 20 h 10, qui est après 20 h. Un ferry A et un ferry B partent donc ensemble 3 fois dans la journée.

Ex. 48 ★★★ **Les engrenages de la boîte à musique**

(a) $84 \div 2 = 42$; $42 \div 2 = 21$; $21 \div 3 = 7$; $7 \div 7 = 1$, donc $84 = 2^2 \times 3 \times 7$. $132 \div 2 = 66$; $66 \div 2 = 33$; $33 \div 3 = 11$; $11 \div 11 = 1$, donc $132 = 2^2 \times 3 \times 11$.

(b) Le nombre de dents passées doit être un multiple de 84 et de 132. Plus petit multiple commun : tous les facteurs, avec le plus grand exposant, $2^2 \times 3 \times 7 \times 11 = 924$. Les repères se retrouvent face à face après 924 dents.

(c) $924 \div 84 = 11$ et $924 \div 132 = 7$. La roue A a fait 11 tours et la roue B a fait 7 tours.

(d) Faux. En 7 tours, il passe $7 \times 84 = 588$ dents, et $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$ ne contient pas le facteur 11, alors que $132 = 2^2 \times 3 \times 11$ le contient. 588 n'est donc pas un multiple de 132 ($588 = 132 \times 4 + 60$) : les repères ne sont pas face à face. C'est la roue B qui fait 7 tours, pas la roue A.

(e) Entre deux rencontres, la roue B fait 7 tours, soit $7 \times 4 = 28$ s. La 4^{e} rencontre a lieu au bout de $4 \times 28 = 112$ s $= 60$ s $+ 52$ s. Les repères sont face à face pour la 4^{e} fois au bout de 1 min 52 s.