49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Rappels : multiples, diviseurs et critères de divisibilité*

À retenir : Unités pour 2, 5, 10 ; deux derniers chiffres pour 4 ; somme des chiffres pour 3 et 9. Pour $6 = 2 \times 3$, $12 = 3 \times 4$, $15 = 3 \times 5$: les deux critères à la fois. Division euclidienne : reste $r < b$.

Ex. 1 ★☆☆ **Le bon critère** — Réponds en citant le bon critère, sans poser de division.

(a) Quel nombre faut-il regarder pour savoir si 7 236 est divisible par 4 ? Conclus.

(b) 5 318 est-il divisible par 4 ?

(c) Le chiffre des unités de 4 813 est 3. Cela prouve-t-il que 4 813 est divisible par 3 ?

(d) Parmi 2, 4, 5, 9 et 10, par quels nombres 7 452 est-il divisible ?

(e) Calcule la somme des chiffres de 4 371. Par lequel des nombres 3 et 9 est-il divisible ?

(f) 3 945 est-il divisible par 6 ?

(g) Justifie que 2 790 est un multiple de 15.

Ex. 2 ★☆☆ **Division euclidienne, multiple et diviseur** — Réponds à chaque question en écrivant l'égalité utile.

(a) Pose la division euclidienne de 587 par 17 et écris l'égalité obtenue.

(b) Une fermière range 1 000 œufs dans des boîtes de 24. Combien de boîtes pleines remplit-elle ? Combien d'œufs restent ?

(c) Lucas écrit : « $425 = 12 \times 34 + 17$, c'est la division euclidienne de 425 par 12. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) 23 est-il un diviseur de 851 ? Justifie.

(e) Complète avec « multiple » ou « diviseur » : « 7 est un … de 98 » et « 98 est un … de 7 ».

(f) Quel est le plus petit multiple de 16 strictement supérieur à 500 ?

Ex. 3 ★★☆ **Chiffres manquants** — Dans chaque nombre, ▪ remplace un chiffre de 0 à 9. Justifie chaque réponse avec les critères de divisibilité.

(a) Inès affirme : « 47▪2 se termine par 2, il ne peut pas être divisible par 9. » A-t-elle raison ? Justifie en trouvant ▪.

(b) Trouve toutes les valeurs de ▪ pour que 51▪4 soit divisible par 12.

Ex. 3 (suite)

(c) Peut-on choisir ▪ pour que 8▪3 soit divisible par 6 ? Justifie.

(d) Trouve toutes les valeurs de ▪ pour que 6▪0 soit divisible par 3 sans être divisible par 9.

Ex. 4 ★★☆ **Tous les diviseurs, sans erreur** — Pour les diviseurs de 144, Malik écrit : $144 = 1 \times 144 = 2 \times 72 = 3 \times 48 = 4 \times 36 = 6 \times 24 = 8 \times 18 = 9 \times 16 = 12 \times 12$. Il conclut : « 144 a 16 diviseurs. »

(a) Explique l'erreur de Malik et donne le nombre exact de diviseurs de 144.

(b) Écris la liste de tous les diviseurs de 135, dans l'ordre croissant.

(c) Les diviseurs d'un nombre, dans l'ordre croissant, sont 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 8 ; ▪ ; ▪ ; ▪. Quel est ce nombre ? Complète la liste.

(d) Rose écrit : « Les diviseurs de 95 sont 5 et 19. » Complète sa liste et explique ce qu'elle a oublié.

Ex. 5 ★★★ **Vrai ou faux : les critères piégés** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie avec un critère, une égalité ou un contre-exemple.

(a) Léna affirme : « 7 426 est divisible par 4 car ses deux derniers chiffres, 2 et 6, sont pairs. »

(b) Hugo affirme : « Un nombre divisible par 2 et par 4 est divisible par 8. » Teste son affirmation sur 1 124.

(c) « Tout multiple de 9 est aussi un multiple de 3. »

(d) Ambre affirme : « 4 512 est divisible par 3, donc il est divisible par 9. »

(e) « Comme $1\,001 = 13 \times 77$, 13 est un multiple de 1 001. »

Ex. 6 ★★★ **Le chiffre effacé de la cantine** — Ce mois-ci, la cantine a servi 7 2▪2 repas, mais une tache cache le chiffre des dizaines ▪. La gérante donne des indices, un par question.

(a) Premier indice : le nombre de repas est divisible par 3. Quelles valeurs ▪ peut-il prendre ? Justifie.

(b) Deuxième indice : le nombre est aussi divisible par 4. Quelles valeurs de ▪ restent ? Explique pourquoi le nombre est alors divisible par 12.

(c) Troisième indice : le nombre est aussi divisible par 9. Trouve le nombre de repas servis.

(d) Les repas sont servis sur des plateaux de 8. Pour le nombre trouvé, Tom écrit : nombre $= 8 \times 900 + 72$. Explique pourquoi ce n'est pas la division euclidienne, puis écris-la.

Ex. 7 ★★★ **Les chaises de la fête** — Pour la fête du collège, Yanis doit disposer 196 chaises en rangées qui ont toutes le même nombre de chaises.

(a) Écris tous les diviseurs de 196 en cherchant les produits égaux à 196. Combien y en a-t-il ?

(b) Yanis pense que 196 a forcément un nombre pair de diviseurs, « puisqu'ils vont par deux ». A-t-il raison ? Justifie.

(c) Yanis veut des rangées de 6 chaises, « puisque 196 est pair ». Est-ce possible ? Justifie.

(d) Il veut plus de 10 chaises par rangée et plus de 3 rangées. Donne toutes les dispositions possibles.

2. *Reconnaître et tester un nombre premier*

À retenir : Un nombre premier a exactement deux diviseurs : 1 n'est pas premier, 2 est le seul premier pair. Pour tester un nombre, j'essaie 2, 3, 5, 7, 11… dans l'ordre et je m'arrête quand le carré du premier essayé dépasse le nombre : $209 = 11 \times 19$.

Ex. 8 ★☆☆ **Premier ou composé ?** — Pour chaque nombre, dis s'il est premier ou composé. Justifie en une ligne : donne un produit, ou bien les divisions essayées.

(a) 1 (b) 2 (c) 87

(d) 91 (e) 79 (f) 161

Ex. 9 ★☆☆ **Chercher des nombres premiers** — Réponds à chaque question en t'aidant des critères de divisibilité.

(a) Écris tous les nombres premiers compris entre 1 et 12.

(b) Combien y a-t-il de nombres premiers entre 30 et 50 ? Écris-les.

(c) Quel est le plus petit nombre premier supérieur à 100 ?

(d) Quel est le plus grand nombre premier inférieur à 120 ?

(e) Écris tous les nombres impairs compris entre 20 et 40 qui ne sont pas premiers.

Ex. 10 ★★☆ **Tester un nombre premier** — Teste les nombres premiers dans l'ordre : 2, 3, 5, 7, 11… et rédige ta réponse.

(a) 221 est-il premier ? Justifie.

(b) 1 007 est-il premier ? Justifie.

(c) Jusqu'à quel nombre premier faut-il aller pour tester 353 ? Teste-le et conclus.

Ex. 11 ★★☆ **Erreurs et affirmations** — Lis chaque affirmation avec attention avant de répondre.

(a) Tom écrit : « 391 n'est divisible ni par 2, 3, 5, 7, 11, ni par 13, donc il est premier. » A-t-il raison ? Justifie.

(b) « Un nombre qui n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5 est premier. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 11 (suite)

(c) « Tous les nombres premiers sont impairs. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Malik affirme : « 1 est premier, car il n'est divisible que par 1 et par lui-même. » Explique son erreur.

Ex. 12 ★★★ **Le cadenas d'Inès** — Inès a oublié le code de son cadenas : elle sait seulement que c'est un nombre premier. Avec Hugo, elle s'entraîne d'abord à tester des nombres de trois chiffres.

(a) Hugo dit : « Pour savoir si 437 est premier, je dois essayer toutes les divisions jusqu'à 218, la moitié de 437. » Corrige sa méthode : jusqu'à quel nombre premier faut-il aller ?

(b) 437 est-il premier ? Justifie en rédigeant le test.

(c) Le code d'Inès est le plus petit nombre premier plus grand que 437. Trouve ce code et justifie.

(d) Combien de nombres premiers faut-il essayer, au plus, pour tester n'importe quel nombre de trois chiffres ? Justifie.

Ex. 13 ★★★ **Sommes de nombres premiers** — Nora et Sacha jouent à écrire des nombres comme sommes de deux nombres premiers. Réponds à chaque question en justifiant.

(a) Nora affirme : « La somme de deux nombres premiers est toujours paire. » Vrai ou faux ? Justifie.

(b) Nora ajoute 2 à un nombre premier. Trouve tous les nombres premiers inférieurs à 30 pour lesquels le résultat est encore premier.

(c) Écris 60 comme somme de deux nombres premiers de toutes les façons possibles.

(d) Sacha dit : « 51 est impair, donc 51 est premier. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Peut-on écrire 51 comme somme de deux nombres premiers ? Justifie.

Ex. 14 ★★★ **Le crible de Zoé jusqu'à 150** — Zoé écrit les nombres de 1 à 150. Elle barre 1, puis les multiples de 2, de 3, de 5 et de 7, sauf ces quatre nombres eux-mêmes. Elle s'arrête là, comme dans le crible jusqu'à 100.

(a) Lucas pense que Zoé aurait dû barrer 2, parce que c'est un nombre pair. A-t-il raison ? Justifie.

(b) Zoé pense que tous les nombres non barrés sont premiers. Trouve tous les nombres composés qu'elle a oublié de barrer. Justifie.

(c) Écris tous les nombres premiers compris entre 120 et 130. Justifie.

(d) Zoé affirme : « Il n'y a qu'un seul nombre premier entre 130 et 140. » Vrai ou faux ? Justifie.

3. *Décomposer en produit de facteurs premiers*

À retenir : Je divise par le plus petit nombre premier possible (2, 3, 5, 7…), puis je recommence avec le quotient jusqu'à $1 : 600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$. Que des facteurs premiers, jamais 1, et je vérifie le produit. Un carré a tous ses exposants pairs.

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : divisions successives** — Décompose chaque nombre en produit de facteurs premiers par divisions successives, puis vérifie en recalculant le produit.

(a) 90 (b) 156 (c) 525

(d) 1 375 (e) 1 001 (f) 2 873

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : aller-retour** — Les facteurs sont rangés dans l'ordre croissant et regroupés avec des exposants.

(a) Calcule le nombre $2^3 \times 3^2 \times 7$.

(b) Sachant que $1\,200 = 12 \times 100$, décompose 1 200 en produit de facteurs premiers.

(c) Calcule le nombre $3 \times 5^3 \times 11$.

(d) Sans divisions successives, décompose 2 700 en produit de facteurs premiers.

(e) Trouve l'exposant manquant : $2^2 \times 7^{\cdots} \times 13 = 2\,548$.

(f) Sachant que $8\,800 = 88 \times 100$, décompose 8 800 en produit de facteurs premiers.

Ex. 17 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur** — Chaque élève a voulu décomposer un nombre en produit de facteurs premiers. Sa décomposition est-elle juste ? Justifie, puis corrige si besoin.

(a) Noé écrit : $360 = 2^2 \times 6 \times 15$.

(b) Inès écrit : $252 \div 4 = 63$; $63 \div 9 = 7$, donc $252 = 4 \times 9 \times 7$.

(c) Jade écrit : $750 \div 2 = 375$; $375 \div 3 = 125$; $125 \div 5 = 25$, donc $750 = 2 \times 3 \times 5$.

(d) Sarah écrit : $1\,470 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$.

(e) Tom écrit : $990 = 1 \times 2 \times 3^2 \times 5 \times 11$.

Ex. 18 ★★☆ **Exploiter une décomposition** — On étudie le nombre 1 125.

(a) Décompose 1 125 en produit de facteurs premiers par divisions successives.

(b) Sans poser de division, dis si 1 125 est divisible par 75, puis par 27. Justifie.

(c) Construis le tableau de tous les diviseurs de 1 125, puis donne leur nombre.

(d) Par quel plus petit entier faut-il multiplier 1 125 pour obtenir un carré ? Écris ce carré sous la forme a^2.

Ex. 18 (suite)

(e) Par quel plus petit entier faut-il multiplier 1 125 pour obtenir un cube ? Écris ce cube sous la forme b^3.

Ex. 19 ★★★ **Carreaux et petits cubes** — Une boutique vend des lots de 1 176 petits carreaux carrés et des lots de 1 176 petits cubes. Maëlys veut former un grand carré plein avec des carreaux. Yanis veut construire un grand cube plein avec des petits cubes. Chacun utilise tout le contenu des lots qu'il achète.

(a) Décompose 1 176 en complétant le tableau des divisions successives, regroupe avec des exposants, puis vérifie.

Nombre	Diviseur premier
1 176	
1	

(b) Lou affirme : « 1 176 est divisible par 8 et par 6, donc il est divisible par 48. » Vrai ou faux ? Justifie avec la décomposition.

(c) Avec un seul lot, Maëlys peut-elle former un grand carré plein ? Justifie avec la décomposition.

(d) Quel est le plus petit nombre de lots que Maëlys doit acheter ? Combien de carreaux aura alors le côté du grand carré ?

(e) Quel est le plus petit nombre de lots que Yanis doit acheter ? Combien de petits cubes aura alors l'arête du grand cube ?

Ex. 20 ★★★ **La salle de spectacle** — Pour le spectacle de fin d'année, Clément doit installer les 675 chaises de la salle en rangées. Toutes les rangées doivent avoir le même nombre de chaises.

(a) Sans divisions successives, écris 675 comme le produit de 27 par un entier, puis déduis-en la décomposition de 675 en produit de facteurs premiers.

(b) Complète le tableau des diviseurs de 675, puis donne le nombre de diviseurs de 675.

×	1	3	9	27
1				
5				
25				

(c) Clément veut au moins 10 rangées et au moins 10 chaises par rangée. Combien de nombres de rangées peut-il choisir ? Donne-les.

(d) Clément voudrait un nombre pair de rangées. Est-ce possible ? Justifie avec la décomposition.

Ex. 20 **(suite)**

(e) L'an prochain, la salle aura $N = 2 \times 675$ chaises. Écris la décomposition de N, puis explique sans tout lister pourquoi N a 24 diviseurs.

Ex. 21 ★★★ **Le coffre de l'escape game** — Dans un escape game, l'équipe de Zoé doit trouver un code. Le premier indice est le nombre 4 862.

(a) Zoé calcule $4\,862 \div 2 = 2\,431$. Comme 2 431 n'est divisible ni par 3, ni par 5, ni par 7, elle écrit : « $4\,862 = 2 \times 2\,431$ ». A-t-elle raison ? Justifie et termine la décomposition.

(b) Vérifie ta décomposition de 4 862 en recalculant le produit.

(c) Deuxième indice : le code C a 4 chiffres. Ses facteurs premiers sont ceux de 4 862, avec un seul exposant égal à 2 et les autres égaux à 1. Trouve C et justifie.

(d) Dernier indice : le cadenas s'ouvre avec le seul diviseur de C à 3 chiffres qui est divisible par 4 mais pas par 11. Trouve-le, puis vérifie qu'il divise C.

4. *Rendre une fraction irréductible*

À retenir : Je décompose, puis je barre chaque facteur premier commun autant de fois qu'il apparaît des deux côtés : $\frac{2^3 \times 7}{2^2 \times 3} = \frac{14}{3}$. On ne barre jamais dans une somme. $\frac{8}{9}$ est irréductible sans nombre premier.

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : décomposer pour simplifier** — Décompose le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers, puis réponds.

(a) Rends $\frac{84}{126}$ irréductible.

(b) Rends $\frac{120}{168}$ irréductible.

(c) Rends $\frac{72}{200}$ irréductible.

(d) Écris $\frac{270}{90}$ sous la forme la plus simple possible.

(e) Rends $\frac{203}{319}$ irréductible.

(f) Rends $\frac{385}{1\,155}$ irréductible.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : simplifier par étapes** — Simplifie par étapes avec les critères de divisibilité, en indiquant chaque fois par quel nombre tu divises. Vérifie ensuite avec les décompositions qu'il ne reste aucun facteur premier commun.

(a) $\frac{360}{528}$ (b) $\frac{1\,350}{2\,250}$ (c) $\frac{1\,260}{1\,800}$

(d) $\frac{3\,564}{4\,860}$

Ex. 24 ★★☆ **Des erreurs à corriger** — Chaque élève se trompe. Explique son erreur, puis donne la bonne réponse.

(a) Hugo écrit $\frac{5}{6} + \frac{1}{10} = \frac{50+6}{60} = \frac{56}{60}$ et affirme : « C'est le résultat final. »

(b) Inès barre les 4 et écrit $\frac{4+9}{4+11} = \frac{9}{11}$.

(c) Malo écrit $\frac{2^2 \times 3 \times 5}{2 \times 3^2 \times 7} = \frac{5}{7}$: « J'ai supprimé les 2 et les 3. »

(d) Chloé affirme : « $\frac{33}{50}$ n'est pas irréductible, car ni 33 ni 50 ne sont premiers. »

Ex. 25 ★★☆ **Calculer avec des fractions** — Calcule et donne le résultat sous forme irréductible. Dans un produit, simplifie avant de multiplier. Dans une somme, prends pour dénominateur commun le plus petit multiple commun des dénominateurs.

(a) $A = \frac{21}{40} \times \frac{16}{35}$ (b) $B = \frac{45}{14} \times \frac{28}{15}$ (c) $C = \frac{11}{24} + \frac{7}{40}$

(d) $D = \frac{5}{28} + \frac{1}{12}$

Ex. 26 ★★★ **Les livres de la médiathèque** — Une médiathèque possède 2 520 livres. Parmi eux, il y a 1 512 romans et 378 bandes dessinées (BD). Les autres livres sont des documentaires.

(a) Décompose 2 520, 1 512 et 378 en produits de facteurs premiers.

(b) Quelle fraction des livres est formée par les romans ? Donne-la sous forme irréductible.

(c) Nora écrit : « Dans $\frac{378}{2\,520}$, j'ai barré une seule fois chaque facteur premier commun et j'obtiens $\frac{9}{60}$. » A-t-elle raison ? Justifie, puis donne la bonne fraction.

(d) Calcule avec les fractions trouvées aux questions précédentes la part des livres qui sont des documentaires. Vérifie ensuite ton résultat avec le nombre de documentaires.

Ex. 27 ★★★ **Vrai ou faux sur les fractions** — Pour un quiz de classe, Ben propose cinq affirmations. Pour chacune, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie avec des décompositions en produits de facteurs premiers ou par un calcul.

(a) « $\frac{5}{54} + \frac{7}{36} = \frac{31}{108}$, et ce résultat est irréductible. »

(b) « Si le numérateur d'une fraction est un nombre premier, alors la fraction est irréductible. »

(c) « $\frac{1\,587}{69}$ est égal à un nombre entier. »

(d) « $\frac{221}{323}$ ne se simplifie pas : 221 et 323 sont impairs et ne sont divisibles ni par 3 ni par 5. »

(e) « $\frac{35}{48} \times \frac{64}{63} = \frac{20}{27}$ »
(simplifie avant de multiplier).

Ex. 28 ★★★ **Le code de l'escape game** — Dans un escape game, Yanis doit rendre irréductible la fraction $\frac{616}{1\,144}$ pour ouvrir le premier cadenas. Il écrit : « $\frac{616}{1\,144} = \frac{308}{572}$, j'ai simplifié par 2, c'est fini. »

(a) Continue la simplification de Yanis par étapes avec les critères de divisibilité. Vérifie ensuite avec les décompositions qu'il ne reste plus aucun facteur commun.

(b) Le deuxième cadenas s'ouvre avec une fraction égale à $\frac{616}{1\,144}$ dont le numérateur et le dénominateur ont pour somme 380. Trouve cette fraction.

(c) Pour le dernier cadenas, montre sans poser la multiplication que $\frac{616}{1\,144} \times \frac{1\,859}{77}$ est égal à un nombre entier, et donne cet entier.

5. *Partages, rendez-vous et engrenages : diviseurs et multiples communs*

À retenir : Partager sans reste, faire le plus de lots ou les plus grands carrés → diviseur commun : facteurs communs, plus petit exposant. Se retrouver → multiple commun : tous les facteurs, plus grand exposant. Ex. : $12 = 2^2 \times 3$ et $10 = 2 \times 5$: diviseur 2, multiple 60 (pas 120).

Ex. 29 ★☆☆ **Diviseurs et multiples communs à partir des décompositions** — On donne $A = 2^3 \times 3 \times 5$, $B = 2^2 \times 3^2 \times 7$, $C = 5 \times 7 \times 13$ et $D = 2 \times 3 \times 11$.

(a) Écris le plus grand diviseur commun de A et B sous forme décomposée, puis en entier.

(b) Écris le plus petit multiple commun de A et B sous forme décomposée, puis en entier.

(c) Quel est le plus grand diviseur commun de C et D ? Justifie.

(d) Calcule $C \times D$. Est-ce le plus petit multiple commun de C et D ? Justifie.

(e) Décompose 84 et 126 en produit de facteurs premiers, puis donne leur plus grand diviseur commun.

(f) Yanis dit : « Le plus petit multiple commun de 20 et 28 est $20 \times 28 = 560$. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 30 ★☆☆ **Partager ou se retrouver ?** — Pour chaque situation, dis d'abord si tu cherches un diviseur commun ou un multiple commun, puis réponds.

(a) Un fleuriste a 56 roses et 70 tulipes. Il veut faire le plus de bouquets identiques possible avec toutes les fleurs. Combien de bouquets fait-il, et que contient chacun ?

(b) Deux bus partent ensemble à 7 h 50 ; l'un repasse toutes les 25 min, l'autre toutes les 40 min. À quelle heure repartent-ils de nouveau ensemble ?

Ex. 30 (suite)

(c) Jade fait des sachets identiques avec 64 caramels et 96 sucettes, sans reste. Elle veut le plus de sachets possible : combien en fait-elle, et que contient chacun ?

(d) Deux coureurs partent ensemble de la ligne ; l'un boucle un tour en 50 s, l'autre en 75 s. Au bout de combien de temps (en min et s) repassent-ils ensemble sur la ligne ?

Ex. 31 ★★☆ **Le carrelage de Malik** — Malik veut carreler le sol d'une pièce rectangulaire de 330 cm sur 210 cm avec des carreaux carrés identiques, sans découpe. Le côté d'un carreau mesure un nombre entier de centimètres.

(a) Décompose 330 et 210 en produit de facteurs premiers.

(b) Malik pense prendre des carreaux de 15 cm de côté. Est-ce possible sans découpe ? Justifie.

(c) Quel est le côté du plus grand carreau possible ? Justifie.

(d) Combien de carreaux de cette taille faut-il pour couvrir toute la pièce ?

Ex. 32 ★★☆ **Le vélo de Sacha** — Sur le vélo de Sacha, une chaîne relie le plateau (48 dents) au pignon (18 dents) : le même nombre de dents passe sur les deux roues. Au départ, un repère sur chaque roue est aligné avec la chaîne.

(a) Décompose 48 et 18 en produit de facteurs premiers.

(b) Inès dit : « Les repères se retrouvent pour la première fois après $48 \times 18 = 864$ dents. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Combien de tours fait chaque roue avant que les repères se retrouvent pour la première fois ?

(d) Le plateau a fait 15 tours. Les deux repères sont-ils de nouveau à leur position de départ ? Justifie.

Ex. 33 ★★★ **Les colis de l'association** — Une association a reçu 1 260 cahiers et 1 512 stylos. Elle veut préparer des colis identiques en utilisant tous les cahiers et tous les stylos. Elle veut faire le plus de colis possible.

(a) Décompose 1 260 et 1 512 en produit de facteurs premiers.

(b) Noé dit : « Je cherche le plus petit multiple commun de 1 260 et 1 512. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Combien de colis l'association peut-elle préparer au maximum ? Donne la composition d'un colis.

(d) Le président voudrait faire 24 colis. Est-ce possible ? Justifie.

Ex. 34 ★★★ **Les deux phares** — Depuis la plage, Tom observe deux phares. Le premier s'allume toutes les 45 s, le second toutes les 105 s. À 21 h pile, ils s'allument en même temps.

(a) Décompose 45 et 105 en produit de facteurs premiers.

(b) Tom dit : « Ils se rallumeront ensemble dans 15 s, car 15 divise 45 et 105. » Corrige son erreur et donne la bonne durée en minutes et secondes.

Ex. 34 **(suite)**

(c) À quelle heure les phares s'allumeront-ils ensemble pour la troisième fois après 21 h ?

(d) Combien de fois s'allument-ils ensemble après 21 h et avant 22 h ? Justifie.

Ex. 35 ★★★ **L'horloge de Lina** — Dans l'horloge en bois de Lina, une roue de 54 dents entraîne une roue de 72 dents. Au départ, un repère est peint sur chaque roue, et les deux repères sont face à face.

(a) Décompose 54 et 72 en produit de facteurs premiers.

(b) Combien de dents passent avant que les repères soient de nouveau face à face pour la première fois ?

(c) Combien de tours fait chaque roue à ce moment-là ?

(d) On remplace la roue de 72 dents par une roue C (entre 20 et 50 dents). Les repères se retrouvent pour la première fois après 2 tours de la roue de 54 dents. Combien de dents a C ? Justifie.

(e) Combien de tours fait alors la roue C ?

6. *PGCD et algorithme d'Euclide (complément)*

À retenir : Complément : $a = b \times q + r$, puis je divise b par r ; le PGCD est le dernier reste non nul, pas le quotient. Si b divise a, PGCD $= b$. PGCD $= 1$: premiers entre eux, comme 8 et 9 (consécutifs), sans être premiers.

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : les divisions d'Euclide (complément)** — Complément hors programme. Réponds en écrivant chaque division sous la forme $a = b \times q + r$.

(a) Écris la division euclidienne de 888 par 312.

(b) On a écrit $527 = 93 \times 5 + 62$. Écris la division suivante de l'algorithme d'Euclide.

(c) Pour 1 598 et 646, les divisions d'Euclide donnent les restes 306, puis 34, puis 0. Donne PGCD(1 598 ; 646).

(d) On a $2\,415 = 345 \times 7 + 0$. Donne PGCD(2 415 ; 345).

(e) Calcule PGCD(4 199 ; 1 547) avec l'algorithme d'Euclide.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : premiers entre eux (complément)** — Deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur PGCD vaut 1.

(a) 55 et 84 sont-ils premiers entre eux ? Justifie avec leurs décompositions.

(b) Vrai ou faux ? « 91 et 65 sont premiers entre eux. » Justifie.

(c) Vrai ou faux ? « Si deux nombres sont premiers entre eux, ils sont premiers. » Justifie avec 27 et 64.

(d) Sans faire de division, donne PGCD(2 026 ; 2 027). Justifie.

Ex. 37 **(suite)**

(e) Trouve le seul nombre composé compris entre 20 et 30 qui est premier avec 12.

Ex. 38 ★★☆ **Hugo et les soustractions successives (complément)** — Pour trouver le PGCD de 168 et 72, Hugo remplace le plus grand nombre par la différence des deux, jusqu'à obtenir deux nombres égaux.

(a) Écris toutes les soustractions d'Hugo et donne le PGCD.

(b) Retrouve ce résultat avec l'algorithme d'Euclide. Combien de divisions faut-il ?

(c) Retrouve-le une troisième fois avec les décompositions en produit de facteurs premiers de 168 et 72.

(d) Rends la fraction $\frac{168}{72}$ irréductible.

Ex. 39 ★★☆ **L'erreur de Nadia (complément)** — Nadia écrit : $1\,254 = 494 \times 2 + 266$; $494 = 266 \times 1 + 228$; $266 = 228 \times 1 + 38$; $228 = 38 \times 6 + 0$. Elle conclut : « PGCD(1 254 ; 494) = 6 ».

(a) A-t-elle raison ? Justifie et corrige sa conclusion.

(b) Rends la fraction $\frac{1\,254}{494}$ irréductible.

(c) Vérifie avec l'algorithme d'Euclide que le numérateur et le dénominateur que tu as obtenus sont premiers entre eux.

Ex. 40 ★★★ **Les boîtes du chocolatier (complément)** — Complément hors programme. Un chocolatier a 2 418 truffes et 1 365 pralines. Il veut remplir le plus grand nombre possible de boîtes identiques, avec toutes ses truffes et toutes ses pralines.

(a) Applique l'algorithme d'Euclide à 2 418 et 1 365. Écris toutes les divisions et donne leur PGCD.

(b) Combien de boîtes peut-il faire au maximum ? Combien de truffes et de pralines y aura-t-il dans chaque boîte ?

(c) Écris $\frac{1\,365}{2\,418}$ sous forme irréductible. Les deux termes obtenus sont-ils des nombres premiers ? Justifie.

(d) Le lendemain, il a toujours 1 365 pralines mais seulement 1 053 truffes. Sans nouvelle division, utilise la première question pour trouver le nombre maximal de boîtes et leur contenu.

Ex. 41 ★★★ **Les affirmations du club de maths (complément)** — Complément hors programme. Au club de maths, Ben propose trois affirmations, puis un calcul sur le PGCD. Réponds en justifiant soigneusement.

(a) Inès écrit $4\,284 = 357 \times 12 + 0$ et conclut : « PGCD (4 284 ; 357) = 12 ». A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Vrai ou faux : « 1 001 et 1 003 sont premiers entre eux, car ce sont deux nombres impairs qui se suivent. » Justifie.

(c) Zoé affirme : « 2 025 et 1 573 ne sont pas premiers entre eux, puisque aucun des deux n'est premier. » A-t-elle raison ? Justifie avec l'algorithme d'Euclide.

Ex. 41 **(suite)**

(d) Utilise $4\,641 - 4\,284$ et la première question pour trouver PGCD$(4\,641\,;4\,284)$, puis rends $\frac{4\,284}{4\,641}$ irréductible.

Ex. 42 ★★★ **La terrasse de Yanis (complément)** — Complément hors programme. Une terrasse de 1 152 cm sur 448 cm doit être couverte de carreaux carrés identiques, sans découpe, les plus grands possible. Yanis écrit : $1\,152 = 448 \times 2 + 256$; $1\,152 = 256 \times 4 + 128$; $256 = 128 \times 2 + 0$. Il conclut : côté 128 cm.

(a) Explique l'erreur de méthode de Yanis. Montre que 128 cm ne convient pas, puis refais l'algorithme d'Euclide correctement.

(b) Quel est le côté du plus grand carreau possible ? Combien de carreaux faut-il alors ?

(c) Retrouve ce côté en décomposant 1 152 et 448 en produits de facteurs premiers.

(d) Le carreleur n'a que des carreaux de 32 cm ou de 48 cm de côté. Lesquels peut-il poser sans découpe ? Justifie.

7. *Exercices type brevet*

À retenir : Partager → plus grand diviseur commun : facteurs communs, plus petit exposant. Se retrouver → plus petit multiple commun : tous les facteurs, plus grand exposant. Faux : un contre-exemple suffit ; vrai « toujours » : un exemple ne suffit pas.

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : décomposer et tester** — Pour un test de primalité, arrête-toi dès que le carré du nombre premier essayé dépasse le nombre.

(a) Décompose 588 en produit de facteurs premiers.

(b) Décompose 1 089 en produit de facteurs premiers.

(c) 391 est-il premier ? Justifie.

(d) Léa écrit $343 = 7 \times 49$ et affirme que c'est la décomposition de 343 en produit de facteurs premiers. A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Quel nombre a pour décomposition en produit de facteurs premiers $2^3 \times 5 \times 13$?

(f) 97 est-il premier ? Justifie.

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : lire des décompositions** — On donne $A = 2^3 \times 3^2 \times 5$, $B = 2^2 \times 3 \times 7$ et $C = 3 \times 5^2 \times 11$.

(a) Calcule A et B.

(b) Écris le plus grand diviseur commun de A et B sous forme de produit, puis calcule-le.

(c) Écris le plus petit multiple commun de A et B sous forme de produit, puis calcule-le.

(d) Mia affirme : « B et C n'ont aucun diviseur commun autre que 1. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 44 **(suite)**

(e) Sans calculer de division, dis si $2 \times 3^2 \times 5$ est un diviseur de A. Justifie.

(f) Sans calculer de division, dis si $3^2 \times 7$ est un diviseur de B. Justifie.

Ex. 45 ★★☆ **Vrai ou faux autour d'un programme de calcul** — Programme de calcul : choisis un nombre entier, multiplie-le par lui-même, ajoute le nombre de départ, puis ajoute 41.

(a) Calcule le résultat obtenu avec 5. Ce résultat est-il premier ? Justifie.

(b) Quel nombre de départ donne le résultat 113 ? Justifie.

(c) « Avec 40, on obtient un carré parfait. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Zoé teste 1, 2 et 3 : elle obtient 43, 47 et 53, tous premiers. Elle conclut : « Le résultat est toujours premier. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 46 ★★☆ **Former des équipes pour un cross** — Pour un cross, un collège répartit 168 filles et 252 garçons en équipes. Toutes les équipes ont le même nombre de filles et le même nombre de garçons, et chaque élève est dans une équipe.

(a) Décompose 168 et 252 en produit de facteurs premiers.

(b) Peut-on former 8 équipes ? Justifie.

(c) Quel est le plus grand nombre d'équipes possible ? Donne la composition de chaque équipe.

(d) Le professeur veut au moins 10 élèves par équipe. Combien d'équipes peut-il former au maximum ? Donne leur composition.

Ex. 47 ★★★ **Le plateau et le pignon d'un vélo** — Sur le vélo de Maëlle, le plateau a 48 dents et le pignon 18 dents. La chaîne les relie : à chaque instant, le même nombre de dents passe sur chaque roue. Maëlle peint un repère sur une dent de chaque roue, face à face sur la chaîne, puis elle pédale.

(a) Décompose 48 et 18 en produit de facteurs premiers.

(b) Hugo affirme : « Les repères se retrouveront pour la première fois après $48 \times 18 = 864$ dents. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Combien de tours chaque roue a-t-elle faits quand les repères se retrouvent pour la première fois ?

(d) Maëlle change de pignon. Les repères se retrouvent alors pour la première fois après 5 tours du plateau et 12 tours du pignon. Combien de dents a ce nouveau pignon ?

Ex. 48 ★★★ **Daller une terrasse sans découpe** — Samir veut couvrir une terrasse rectangulaire de 756 cm sur 540 cm avec des dalles carrées toutes identiques, sans découpe et sans espace. Le côté d'une dalle mesure un nombre entier de centimètres.

(a) Décompose 756 et 540 en produit de facteurs premiers.

Ex. 48 **(suite)**

(b) Quel est le plus grand côté de dalle possible ? Combien de dalles faut-il alors ?

(c) Théo propose des dalles de 45 cm de côté. Est-ce possible ? Justifie.

(d) Le magasin ne vend que des dalles de côté compris entre 30 cm et 60 cm. Quels côtés conviennent ? Lequel demande le moins de dalles, et combien ?

Ex. 49 ★★★ **Une feuille de tableur qui compte les diviseurs** — Dans la colonne A d'une feuille de tableur, Inès écrit les entiers de 1 à 200. Dans la colonne B, une formule affiche le nombre de diviseurs de l'entier écrit à côté, dans la colonne A.

(a) Quel nombre s'affiche à côté de 1 ? Inès dit que 1 est premier. A-t-elle raison ? Justifie.

(b) 187 est-il premier ? Justifie, puis donne le nombre affiché à côté de 187.

(c) Rédige un test de primalité pour 199. Quel nombre s'affiche à côté de 199 ?

(d) Vrai ou faux ? « Si on multiplie deux nombres premiers, le tableur affiche toujours 4 à côté du résultat. » Justifie.

(e) Décompose 196 en produit de facteurs premiers, puis trouve à l'aide d'un tableau le nombre affiché à côté de 196.