1. Rappels : multiples, diviseurs et critères de divisibilité

Ex. 1 ★☆☆ Le bon critère

(a) On regarde le nombre formé par les deux derniers chiffres : $36 = 4 \times 9$.
Donc 7 236 est divisible par 4.

(b) Deux derniers chiffres : $18 = 4 \times 4 + 2$. Non : 5 318 est pair, mais il n'est pas divisible par 4.

(c) Non : pour 3, on regarde la somme des chiffres, pas le dernier chiffre. $4 + 8 + 1 + 3 = 16$ n'est pas divisible par 3, donc 4 813 n'est pas divisible par 3.

(d) Il se termine par 2 : divisible par 2, pas par 5 ni par 10. $52 = 4 \times 13$: divisible par 4. $7 + 4 + 5 + 2 = 18$: divisible par 9.
Donc 7 452 est divisible par 2, 4 et 9.

(e) $4 + 3 + 7 + 1 = 15$, divisible par 3 mais pas par 9.
Donc 4 371 est divisible par 3, mais pas par 9.

(f) 3 945 se termine par 5 : il est impair, donc pas divisible par 2. Non, il n'est pas divisible par 6
(même si $3 + 9 + 4 + 5 = 21$ est divisible par 3).

(g) $15 = 3 \times 5$. 2 790 se termine par 0 (divisible par 5) et $2 + 7 + 9 + 0 = 18$ (divisible par 3).
Donc 2 790 est un multiple de 15 : $2\,790 = 15 \times 186$.

Ex. 2 ★☆☆ Division euclidienne, multiple et diviseur

(a) $587 = 17 \times 34 + 9$
(quotient 34, reste 9, et $9 < 17$).

(b) $1\,000 = 24 \times 41 + 16$: elle remplit 41 boîtes et il reste 16 œufs.

(c) L'égalité est juste, mais le reste 17 n'est pas plus petit que 12. Il n'a pas raison : la division euclidienne est $425 = 12 \times 35 + 5$.

(d) $851 = 23 \times 37$: le reste est 0. Oui, 23 est un diviseur de 851.

(e) $98 = 7 \times 14$: 7 est un diviseur de 98, et 98 est un multiple de 7.

(f) $500 = 16 \times 31 + 4$, donc le multiple suivant est $16 \times 32 = 512$.

Ex. 3 ★★☆ Chiffres manquants

(a) Non : pour 9, on regarde la somme des chiffres, pas le dernier. $4 + 7 + ▪ + 2 = 13 + ▪$; entre 13 et 22, le seul multiple de 9 est 18, donc $▪ = 5$: $4\,752 = 9 \times 528$.

(b) $12 = 3 \times 4$. Par 4 : ■4 divisible par 4 donne $▪ \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$. Par 3 : $10 + ■$ divisible par 3 donne $▪ \in \{2; 5; 8\}$. Les deux à la fois : $▪ = 2$ ou $▪ = 8$, soit 5 124 et 5 184.

(c) Non : 8■3 se termine par 3, il est impair, donc jamais divisible par 2. Il ne peut pas être divisible par 6, quel que soit ▪.

(d) Par 3 : $6 + ■$ divisible par 3 donne $▪ \in \{0; 3; 6; 9\}$. Pour $▪ = 3$, la somme vaut 9 : 630 est divisible par 9, on l'exclut.
Donc $▪ = 0$, 6 ou 9 : 600, 660 et 690.

Ex. 4 ★★☆ Tous les diviseurs, sans erreur

(a) 8 produits donnent 16 nombres, mais 12×12 ne donne qu'un seul diviseur, 12, qu'il faut écrire une seule fois. 144 a donc 15 diviseurs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 16 ; 18 ; 24 ; 36 ; 48 ; 72 ; 144.

(b) $135 = 1 \times 135 = 3 \times 45 = 5 \times 27 = 9 \times 15$; ni 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13 ni 14 ne conviennent, et 15 est déjà trouvé. Diviseurs de 135 : 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 27 ; 45 ; 135.

(c) Les diviseurs vont par paires dont le produit est le nombre. Il y a 8 diviseurs, donc 7 et 8 forment la paire du milieu : le nombre est $7 \times 8 = 56$. $56 = 1 \times 56 = 2 \times 28 = 4 \times 14 = 7 \times 8$. Liste : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 8 ; 14 ; 28 ; 56.

(d) $95 = 1 \times 95 = 5 \times 19$; ni 2, 3, 4, 6, 7, 8 ni 9 ne conviennent. Rose a oublié 1 et 95 : 1 et le nombre lui-même sont toujours des diviseurs. Diviseurs de 95 : 1 ; 5 ; 19 ; 95.

Ex. 5 ★★★ Vrai ou faux : les critères piégés

(a) Faux. Pour 4, on regarde le nombre formé par les deux derniers chiffres, ici 26. Or $26 = 4 \times 6 + 2$: le reste n'est pas 0.
Donc 7 426 n'est pas divisible par 4
(on a $7\,426 = 4 \times 1\,856 + 2$).

(b) Faux. 1 124 est pair et $24 = 4 \times 6$, donc 1 124 est divisible par 2 et par 4. Mais $1\,124 = 8 \times 140 + 4$: il n'est pas divisible par 8. On ne combine pas 2 et 4, car ils ont le facteur 2 en commun.

Ex. 5 **(suite)**

(c) Vrai. Si $a = 9 \times q$, alors $a = 3 \times 3 \times q = 3 \times (3 \times q)$. Donc a est un multiple de 3.

(d) Faux. $4 + 5 + 1 + 2 = 12$: 12 est divisible par 3 mais pas par 9.
Donc 4 512 est divisible par 3 ($4\,512 = 3 \times 1\,504$) mais pas par 9
($4\,512 = 9 \times 501 + 3$).

(e) Faux. L'égalité $1\,001 = 13 \times 77$ montre que 13 est un diviseur de 1 001. C'est 1 001 qui est un multiple de 13 : les deux mots vont en sens inverse.

Ex. 6 ★★★ **Le chiffre effacé de la cantine**

(a) La somme des chiffres vaut $7 + 2 + ▪ + 2 = 11 + ▪$. Elle doit être divisible par 3 : $11 + ▪$ vaut 12, 15 ou 18. Donc ▪ peut être 1, 4 ou 7.

(b) On regarde le nombre formé par les deux derniers chiffres : $12 = 4 \times 3$ convient, $42 = 4 \times 10 + 2$ ne convient pas, $72 = 4 \times 18$ convient. Il reste ▪ = 1 ou ▪ = 7, soit 7 212 ou 7 272. Ces nombres sont divisibles par 3 et par 4, qui n'ont pas de facteur commun, donc ils sont divisibles par 12.

(c) Pour 7 212 : $7 + 2 + 1 + 2 = 12$, pas divisible par 9. Pour 7 272 : $7 + 2 + 7 + 2 = 18$, divisible par 9. La cantine a servi 7 272 repas.

(d) L'égalité est juste, mais le reste 72 n'est pas plus petit que 8 : ce n'est donc pas la division euclidienne. Comme $72 = 8 \times 9$, on a $7\,272 = 8 \times 909 + 0$. Le reste est 0 : on remplit exactement 909 plateaux.

Ex. 7 ★★★ **Les chaises de la fête**

(a) $196 = 1 \times 196 = 2 \times 98 = 4 \times 49 = 7 \times 28 = 14 \times 14$. Les nombres 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12 et 13 ne conviennent pas. Après 14, on retombe sur des diviseurs déjà trouvés : on s'arrête. Diviseurs de 196 : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28 ; 49 ; 98 ; 196. Il y en a 9.

(b) Non. Le produit 14×14 ne donne qu'un seul diviseur, 14, qu'on écrit une seule fois. Comme 196 est un carré parfait, il a un nombre impair de diviseurs : 9.

(c) Non. 196 est pair, mais $1 + 9 + 6 = 16$ n'est pas divisible par 3.
Donc 196 n'est pas divisible par 3, ni par 6 :
$196 = 6 \times 32 + 4$. Il resterait 4 chaises.

Ex. 7 **(suite)**

(d) Le nombre de chaises par rangée doit être un diviseur de 196 plus grand que 10 : 14, 28, 49, 98 ou 196. Cela donne 14, 7, 4, 2 ou 1 rangées. Avec plus de 3 rangées, il reste 3 dispositions : 14 rangées de 14 chaises, 7 rangées de 28 chaises ou 4 rangées de 49 chaises.

2. *Reconnaître et tester un nombre premier*

Ex. 8 ★☆☆ **Premier ou composé ?**

(a) 1 a un seul diviseur, lui-même : il n'est ni premier ni composé.

(b) Les diviseurs de 2 sont 1 et 2 : 2 est premier (c'est le seul premier pair).

(c) $8 + 7 = 15$ est divisible par 3 : $87 = 3 \times 29$, donc 87 est composé.

(d) $91 = 7 \times 13$, donc 91 est composé.

(e) Ni 2, ni 3 ($7 + 9 = 16$), ni 5, ni 7 ($79 = 7 \times 11 + 2$) ; $11 \times 11 = 121$ dépasse 79 : 79 est premier.

(f) $161 = 7 \times 23$, donc 161 est composé.

Ex. 9 ★☆☆ **Chercher des nombres premiers**

(a) 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11
(attention, 1 n'est pas premier et 2 l'est).

(b) Il y en a 5 : 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47.

(c) 101 : il n'est divisible ni par 2, ni par 3 ($1 + 0 + 1 = 2$), ni par 5, ni par 7 ($101 = 7 \times 14 + 3$). $11 \times 11 = 121$ dépasse 101 : 101 est premier.

(d) $119 = 7 \times 17$, $117 = 9 \times 13$ et $115 = 5 \times 23$ sont composés, comme les nombres pairs. 113 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 ($113 = 7 \times 16 + 1$) et 121 dépasse 113 : c'est 113.

(e) $21 = 3 \times 7$; $25 = 5 \times 5$; $27 = 3 \times 9$; $33 = 3 \times 11$; $35 = 5 \times 7$; $39 = 3 \times 13$.

Ex. 10 ★★☆ **Tester un nombre premier**

(a) 221 n'est divisible ni par 2, ni par 3 ($2 + 2 + 1 = 5$), ni par 5, ni par 7 ($221 = 7 \times 31 + 4$), ni par 11 ($221 = 11 \times 20 + 1$). $13 \times 13 = 169$ ne dépasse pas 221 : on essaie 13, et $221 = 13 \times 17$. 221 n'est pas premier.

Ex. 10 **(suite)**

(b) 1 007 n'est divisible ni par 2, ni par 3 ($1+0+0+7=8$), ni par 5, ni par 7 ($1\,007 = 7\times 143+6$), ni par 11 ($1\,007 = 11\times 91+6$), ni par 13 ($1\,007 = 13\times 77+6$), ni par 17 ($1\,007 = 17\times 59+4$). $19\times 19 = 361$ ne dépasse pas 1 007 : on essaie 19, et $1\,007 = 19\times 53$. 1 007 n'est pas premier.

(c) Il suffit d'aller jusqu'à 17 : $17\times 17 = 289$ ne dépasse pas 353, mais $19\times 19 = 361$ le dépasse. Or 353 n'est divisible ni par 2, ni par 3 ($3+5+3=11$), ni par 5, ni par 7 ($353 = 7\times 50+3$), ni par 11 ($353 = 11\times 32+1$), ni par 13 ($353 = 13\times 27+2$), ni par 17 ($353 = 17\times 20+13$). 353 est premier.

Ex. 11 ★★☆ **Erreurs et affirmations**

(a) Non : $17\times 17 = 289$ ne dépasse pas 391, Tom s'est arrêté trop tôt. En essayant 17, on trouve $391 = 17\times 23$: 391 n'est pas premier.

(b) Faux : 77 n'est divisible ni par 2, ni par 3 ($7+7=14$), ni par 5, mais $77 = 7\times 11$ est composé.

(c) Faux : 2 est premier et il est pair. C'est le seul nombre premier pair.

(d) Un nombre premier a exactement deux diviseurs différents. 1 n'en a qu'un seul (1 et « lui-même » sont le même nombre) : 1 n'est pas premier.

Ex. 12 ★★★ **Le cadenas d'Inès**

(a) Hugo fait beaucoup trop de divisions. On essaie seulement les nombres premiers dans l'ordre et on s'arrête quand leur carré dépasse 437 : $19\times 19 = 361$ ne dépasse pas 437, mais $23\times 23 = 529$ le dépasse. Il suffit donc d'essayer 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

(b) 437 est impair ; $4+3+7=14$, donc il n'est pas divisible par 3 ; il ne se termine ni par 0 ni par 5. $437 = 7\times 62+3$; $437 = 11\times 39+8$; $437 = 13\times 33+8$; $437 = 17\times 25+12$; mais $437 = 19\times 23$. 437 n'est pas premier : c'est un nombre composé, même s'il « a l'air » premier.

(c) 438 est pair, donc composé. On teste 439 : il est impair ; $4+3+9=16$, donc il n'est pas divisible par 3 ; il ne se termine ni par 0 ni par 5 ; $439 = 7\times 62+5$; $439 = 11\times 39+10$; $439 = 13\times 33+10$; $439 = 17\times 25+14$; $439 = 19\times 23+2$. Comme $23\times 23 = 529$ dépasse 439, on s'arrête. 439 est premier : le code est 439.

Ex. 12 **(suite)**

(d) Le plus grand nombre de trois chiffres est 999. $31\times 31 = 961$ ne dépasse pas 999, mais $37\times 37 = 1\,369$ le dépasse. On essaie donc au plus les nombres premiers de 2 à 31 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 et 31, soit 11 nombres premiers.

Ex. 13 ★★★ **Sommes de nombres premiers**

(a) Faux. Par exemple, 2 et 3 sont premiers, mais $2+3=5$ est impair. La somme est impaire dès qu'un seul des deux nombres est égal à 2.

(b) Les nombres premiers inférieurs à 30 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29. En ajoutant 2, on obtient 4, 5, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25 et 31. Seuls 5, 7, 13, 19 et 31 sont premiers. Les nombres cherchés sont 3, 5, 11, 17 et 29.

(c) $60-2=58$ est pair, donc 2 ne convient pas. On essaie les autres : $3+57$ ne convient pas ($57 = 3\times 19$), ni $5+55$ ($55 = 5\times 11$), ni $11+49$ ($49 = 7\times 7$). Il y a six façons : $60 = 7+53 = 13+47 = 17+43 = 19+41 = 23+37 = 29+31$.

(d) Non. $5+1=6$ est divisible par 3, donc 51 l'est aussi : $51 = 3\times 17$. 51 est un nombre composé : « impair » ne veut pas dire « premier ».

(e) La somme de deux nombres impairs est paire. Comme 51 est impair, l'un des deux nombres premiers est pair : c'est forcément 2. L'autre vaut alors $51-2 = 49 = 7\times 7$, qui n'est pas premier. On ne peut donc pas écrire 51 comme somme de deux nombres premiers.

Ex. 14 ★★★ **Le crible de Zoé jusqu'à 150**

(a) Non. Les seuls diviseurs de 2 sont 1 et 2 : il en a exactement deux, donc 2 est premier. C'est le seul nombre premier pair ; les autres nombres pairs sont divisibles par 2, c'est pour cela qu'on les barre.

(b) Un nombre composé non barré n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 : il est le produit d'au moins deux nombres premiers égaux ou supérieurs à 11. $11\times 11 = 121$ et $11\times 13 = 143$ ne dépassent pas 150, mais $11\times 17 = 187$ et $13\times 13 = 169$ le dépassent. Zoé a oublié 121 et 143 : il fallait encore barrer les multiples de 11, car $11\times 11 = 121$ ne dépasse pas 150.

Ex. 14 **(suite)**

(c) On écarte les nombres pairs et 125, multiple de 5. Restent 121, 123, 127 et 129. $121 = 11 \times 11$, $123 = 3 \times 41$ ($1 + 2 + 3 = 6$) et $129 = 3 \times 43$ ($1 + 2 + 9 = 12$) sont composés. Pour 127 : $1 + 2 + 7 = 10$, donc il n'est pas divisible par 3 ; $127 = 7 \times 18 + 1$; $127 = 11 \times 11 + 6$. Comme $13 \times 13 = 169$ dépasse 127, on s'arrête. Le seul nombre premier est 127.

(d) Faux. Entre 130 et 140, il reste à tester 131, 133, 137 et 139. $133 = 7 \times 19$ est composé. $131 = 7 \times 18 + 5 = 11 \times 11 + 10$; $137 = 7 \times 19 + 4 = 11 \times 12 + 5$; $139 = 7 \times 19 + 6 = 11 \times 12 + 7$; aucun n'est divisible par 2, 3 ou 5. Comme $13 \times 13 = 169$ les dépasse, on s'arrête. Il y a trois nombres premiers : 131, 137 et 139.

3. *Décomposer en produit de facteurs premiers*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : divisions successives**

(a) $90 \div 2 = 45$; $45 \div 3 = 15$; $15 \div 3 = 5$; $5 \div 5 = 1$. Donc $90 = 2 \times 3^2 \times 5$. Vérification : $2 \times 9 \times 5 = 90$.

(b) $156 \div 2 = 78$; $78 \div 2 = 39$; $39 \div 3 = 13$; $13 \div 13 = 1$. Donc $156 = 2^2 \times 3 \times 13$. Vérification : $4 \times 3 \times 13 = 156$.

(c) 525 est impair. $525 \div 3 = 175$; $175 \div 5 = 35$; $35 \div 5 = 7$; $7 \div 7 = 1$. Donc $525 = 3 \times 5^2 \times 7$. Vérification : $3 \times 25 \times 7 = 525$.

(d) 1 375 n'est divisible ni par 2 ni par 3 (somme des chiffres 16). $1\,375 \div 5 = 275$; $275 \div 5 = 55$; $55 \div 5 = 11$; $11 \div 11 = 1$. Donc $1\,375 = 5^3 \times 11$. Vérification : $125 \times 11 = 1\,375$.

(e) 1 001 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. $1\,001 \div 7 = 143$; $143 \div 11 = 13$; $13 \div 13 = 1$. Donc $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$. Vérification : $77 \times 13 = 1\,001$.

(f) 2 873 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7, ni par 11. $2\,873 \div 13 = 221$; $221 \div 13 = 17$; $17 \div 17 = 1$. Donc $2\,873 = 13^2 \times 17$. Vérification : $169 \times 17 = 2\,873$.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : aller-retour**

(a) $2^3 \times 3^2 \times 7 = 8 \times 9 \times 7 = 504$.

(b) $12 = 2^2 \times 3$ et $100 = 2^2 \times 5^2$, donc $1\,200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$.

(c) $3 \times 5^3 \times 11 = 3 \times 125 \times 11 = 4\,125$.

(d) $2\,700 = 27 \times 100$, avec $27 = 3^3$ et $100 = 2^2 \times 5^2$. Donc $2\,700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$.

Ex. 16 **(suite)**

(e) $2^2 \times 13 = 52$ et $2\,548 \div 52 = 49 = 7^2$. L'exposant manquant est 2 : $2\,548 = 2^2 \times 7^2 \times 13$.

(f) $88 = 2^3 \times 11$ et $100 = 2^2 \times 5^2$, donc $8\,800 = 2^5 \times 5^2 \times 11$ (on range dans l'ordre croissant : 5 avant 11).

Ex. 17 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur**

(a) Le produit vaut bien 360, mais 6 et 15 ne sont pas premiers : Noé a tort. $6 = 2 \times 3$ et $15 = 3 \times 5$, donc $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

(b) Inès a tort : 4 et 9 ne sont pas premiers. Elle doit diviser par le plus petit nombre premier : $252 \div 2 = 126$; $126 \div 2 = 63$; $63 \div 3 = 21$; $21 \div 3 = 7$; $7 \div 7 = 1$. Donc $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$.

(c) Jade a tort : elle s'arrête au quotient 25 au lieu de 1 (et $2 \times 3 \times 5 = 30$). Elle continue : $25 \div 5 = 5$; $5 \div 5 = 1$. Donc $750 = 2 \times 3 \times 5^3$.

(d) Sarah a tort : on recalcule $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$, pas 1 470. Comme $1\,470 \div 210 = 7$, il manque un facteur 7 : $1\,470 = 2 \times 3 \times 5 \times 7^2$.

(e) Le produit vaut bien 990, mais 1 n'est pas premier et n'apparaît jamais dans une décomposition : Tom a tort. On écrit $990 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 11$.

Ex. 18 ★★☆ **Exploiter une décomposition**

(a) 1 125 est impair. $1\,125 \div 3 = 375$; $375 \div 3 = 125$; $125 \div 5 = 25$; $25 \div 5 = 5$; $5 \div 5 = 1$. Donc $1\,125 = 3^2 \times 5^3$. Vérification : $9 \times 125 = 1\,125$.

(b) $75 = 3 \times 5^2$: un facteur 3 et deux facteurs 5 se trouvent bien dans $3^2 \times 5^3$, donc 1 125 est divisible par 75 ($1\,125 = 75 \times 15$). $27 = 3^3$, mais 1 125 n'a que deux facteurs 3 : il n'est pas divisible par 27.

(c)

×	**1**	**5**	**25**	**125**
1	1	5	25	125
3	3	15	75	375
9	9	45	225	1 125

Il y a $3 \times 4 = 12$ diviseurs : 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 25 ; 45 ; 75 ; 125 ; 225 ; 375 ; 1 125.

(d) Dans $3^2 \times 5^3$, l'exposant de 5 est impair. Il faut donc un facteur 5 de plus : $1\,125 \times 5 = 5\,625 = 3^2 \times 5^4 = (3 \times 5^2)^2 = 75^2$. Le plus petit entier est 5.

(e) Pour un cube, les exposants doivent être des multiples de 3 : il manque un facteur 3. $1\,125 \times 3 = 3\,375 = 3^3 \times 5^3 = (3 \times 5)^3 = 15^3$. Le plus petit entier est 3.

Ex. 19 ★★★ **Carreaux et petits cubes**

(a)

Nombre	Diviseur premier
1 176	2
588	2
294	2
147	3
49	7
7	7
1	

On s'arrête au quotient 1.
Donc $1\,176 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 = 2^3 \times 3 \times 7^2$.
Vérification : $8 \times 3 \times 49 = 24 \times 49 = 1\,176$.

(b) Faux. $48 = 2^4 \times 3$ demande quatre facteurs 2, mais $1\,176 = 2^3 \times 3 \times 7^2$ n'en a que trois. D'ailleurs $1\,176 = 48 \times 24 + 24$: le reste n'est pas nul. 1 176 n'est donc pas divisible par 48.

(c) Non. Dans $1\,176 = 2^3 \times 3 \times 7^2$, les exposants de 2 (qui vaut 3) et de 3 (qui vaut 1) sont impairs, donc 1 176 n'est pas le carré d'un entier. D'ailleurs $34^2 = 1\,156$ et $35^2 = 1\,225$.

(d) Pour avoir tous les exposants pairs, il manque un facteur 2 et un facteur 3 : on multiplie par $2 \times 3 = 6$.
$1\,176 \times 6 = 7\,056 = 2^4 \times 3^2 \times 7^2 = (2^2 \times 3 \times 7)^2 = 84^2$.
Maëlys doit acheter 6 lots. Le côté du grand carré compte 84 carreaux.

(e) Les exposants doivent être des multiples de 3 : 2^3 convient, il manque 3^2 et 7. On multiplie par $9 \times 7 = 63$. $1\,176 \times 63 = 74\,088 = 2^3 \times 3^3 \times 7^3 = (2 \times 3 \times 7)^3 = 42^3$. Yanis doit acheter 63 lots. L'arête du grand cube compte 42 petits cubes.

Ex. 20 ★★★ **La salle de spectacle**

(a) $675 = 27 \times 25$. Mais 27 et 25 ne sont pas premiers : $27 = 3^3$ et $25 = 5^2$.
Donc $675 = 3^3 \times 5^2$. Vérification : $27 \times 25 = 675$.

(b)

×	1	3	9	27
1	1	3	9	27
5	5	15	45	135
25	25	75	225	675

Chaque diviseur est le produit d'une puissance de 3 et d'une puissance de 5. 675 a $4 \times 3 = 12$ diviseurs : 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 25 ; 27 ; 45 ; 75 ; 135 ; 225 ; 675.

Ex. 20 (suite)

(c) Le nombre de rangées est un diviseur de 675 au moins égal à 10. Le nombre de chaises par rangée aussi, donc il y a au plus 67 rangées. Les diviseurs entre 10 et 67 sont 15, 25, 27 et 45. Clément a donc 4 choix : 15 rangées de 45, 25 rangées de 27, 27 rangées de 25 ou 45 rangées de 15.

(d) Non. $675 = 3^3 \times 5^2$ ne contient aucun facteur 2, donc aucun de ses diviseurs n'est pair. Le nombre de rangées divise 675 : il est forcément impair.

(e) $N = 2 \times 3^3 \times 5^2 = 1\,350$. Un diviseur de N est soit un diviseur de 675, soit le double d'un diviseur de 675 (au plus un facteur 2). Il y a donc $2 \times 12 = 24$ diviseurs, soit $2 \times 4 \times 3 = 24$.

Ex. 21 ★★★ **Le coffre de l'escape game**

(a) Non. 2 431 n'est pas premier : il faut continuer les essais tant que le carré du nombre premier essayé ne dépasse pas 2 431 ($7^2 = 49$). On trouve $2\,431 = 11 \times 221$, puis $221 = 13 \times 17$, et $17 \div 17 = 1$.
Donc $4\,862 = 2 \times 11 \times 13 \times 17$.

(b) $2 \times 11 = 22$; $22 \times 13 = 286$; $286 \times 17 = 4\,862$. La décomposition est juste.

(c) Les nombres possibles sont $4\,862 \times 2 = 9\,724$; $4\,862 \times 11 = 53\,482$; $4\,862 \times 13 = 63\,206$; $4\,862 \times 17 = 82\,654$. Seul 9 724 a 4 chiffres.
Donc $C = 9\,724 = 2^2 \times 11 \times 13 \times 17$.

(d) Le diviseur contient 2^2 et pas 11 : c'est 4, $4 \times 13 = 52$, $4 \times 17 = 68$ ou $4 \times 13 \times 17 = 884$. Le seul à 3 chiffres est 884. Vérification : $884 \times 11 = 9\,724$. Le code du cadenas est 884.

4. *Rendre une fraction irréductible*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : décomposer pour simplifier**

(a) $\frac{84}{126} = \frac{2^2 \times 3 \times 7}{2 \times 3^2 \times 7} = \frac{2}{3}$: on barre un 2, un 3 et le 7.

(b) $\frac{120}{168} = \frac{2^3 \times 3 \times 5}{2^3 \times 3 \times 7} = \frac{5}{7}$: on barre trois fois le 2, puis le 3.

(c) $\frac{72}{200} = \frac{2^3 \times 3^2}{2^3 \times 5^2} = \frac{9}{25}$. Elle est irréductible même si 9 et 25 ne sont pas premiers.

(d) $\frac{270}{90} = \frac{2 \times 3^3 \times 5}{2 \times 3^2 \times 5} = 3$: la fraction est égale à un entier.

(e) $\frac{203}{319} = \frac{7 \times 29}{11 \times 29} = \frac{7}{11}$: 203 et 319 ont l'air premiers, mais ils sont tous les deux multiples de 29.

(f) $\frac{385}{1\,155} = \frac{5 \times 7 \times 11}{3 \times 5 \times 7 \times 11} = \frac{1}{3}$: quand tout le numérateur est barré, il reste 1.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : simplifier par étapes**

(a) Trois fois par 2, puis par 3 : $\frac{360}{528} = \frac{180}{264} = \frac{90}{132} = \frac{45}{66} = \frac{15}{22}$. On vérifie : $15 = 3 \times 5$ et $22 = 2 \times 11$, aucun facteur commun.

(b) Par 10, par 9, puis par 5 : $\frac{1\,350}{2\,250} = \frac{135}{225} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$. On vérifie : 3 et 5 sont premiers et différents.

(c) Par 10, par 2, puis par 9 : $\frac{1\,260}{1\,800} = \frac{126}{180} = \frac{63}{90} = \frac{7}{10}$. On vérifie : 7 et $10 = 2 \times 5$ n'ont aucun facteur commun.

(d) Par 4, puis deux fois par 9 : $\frac{3\,564}{4\,860} = \frac{891}{1\,215} = \frac{99}{135} = \frac{11}{15}$. On vérifie : 11 et $15 = 3 \times 5$ n'ont aucun facteur commun.

Ex. 24 ★★☆ **Des erreurs à corriger**

(a) Hugo a tort : son calcul est juste, mais $\frac{56}{60}$ n'est pas irréductible. $56 = 2^3 \times 7$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$: on barre 2 deux fois, donc $\frac{56}{60} = \frac{14}{15}$. Avec le plus petit multiple commun 30, c'est plus court : $\frac{25}{30} + \frac{3}{30} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$.

(b) Inès a tort : on ne barre pas dans une somme. On calcule d'abord : $\frac{4+9}{4+11} = \frac{13}{15}$, et cette fraction est irréductible car 13 est premier et ne divise pas $15 = 3 \times 5$.

(c) Malo a tort : 2 n'apparaît qu'une fois en bas et 3 n'apparaît qu'une fois en haut. On barre un seul 2 et un seul 3 : $\frac{2\times5}{3\times7} = \frac{10}{21}$.

(d) Chloé a tort : $33 = 3 \times 11$ et $50 = 2 \times 5^2$ n'ont aucun facteur premier commun, donc $\frac{33}{50}$ est irréductible. Le numérateur et le dénominateur n'ont pas besoin d'être premiers.

Ex. 25 ★★☆ **Calculer avec des fractions**

(a) $A = \frac{3\times7\times2^4}{2^3\times5\times5\times7} = \frac{3\times2}{5\times5}$, donc $A = \frac{6}{25}$.

(b) $B = \frac{3^2\times5\times2^2\times7}{2\times7\times3\times5} = 3 \times 2$, donc $B = 6$: le résultat est un entier.

(c) $24 = 2^3 \times 3$ et $40 = 2^3 \times 5$, donc le dénominateur commun est $2^3 \times 3 \times 5 = 120$. $C = \frac{55}{120} + \frac{21}{120} = \frac{76}{120} = \frac{2^2\times19}{2^3\times3\times5}$, donc $C = \frac{19}{30}$.

(d) $28 = 2^2 \times 7$ et $12 = 2^2 \times 3$, donc le dénominateur commun est $2^2 \times 3 \times 7 = 84$. $D = \frac{15}{84} + \frac{7}{84} = \frac{22}{84} = \frac{2\times11}{2^2\times3\times7}$, donc $D = \frac{11}{42}$.

Ex. 26 ★★★ **Les livres de la médiathèque**

(a) $2\,520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$; $1\,512 = 2^3 \times 3^3 \times 7$; $378 = 2 \times 3^3 \times 7$.

(b) $\frac{1\,512}{2\,520} = \frac{2^3\times3^3\times7}{2^3\times3^2\times5\times7}$. Je supprime 2^3, 3^2 (le facteur 3 n'est que deux fois en bas) et 7 : il reste $\frac{3}{5}$. Les romans forment $\frac{3}{5}$ des livres.

Ex. 26 (suite)

(c) Non. $\frac{378}{2\,520} = \frac{2\times3^3\times7}{2^3\times3^2\times5\times7}$: le facteur 3 est deux fois en bas, il faut donc le barrer deux fois. D'ailleurs, 9 et 60 sont encore multiples de 3. On supprime 2 une fois, 3 deux fois et 7 une fois : $\frac{378}{2\,520} = \frac{3}{2^2\times5} = \frac{3}{20}$. Les BD forment $\frac{3}{20}$ des livres.

(d) Le plus petit multiple commun de 5 et $20 = 2^2 \times 5$ est 20. $1 - \frac{3}{5} - \frac{3}{20} = \frac{20}{20} - \frac{12}{20} - \frac{3}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. Vérification : $2\,520 - 1\,512 - 378 = 630$ et $\frac{630}{2\,520} = \frac{1}{4}$. Les documentaires forment le quart des livres.

Ex. 27 ★★★ **Vrai ou faux sur les fractions**

(a) Vrai. $54 = 2 \times 3^3$ et $36 = 2^2 \times 3^2$, donc le plus petit multiple commun est $2^2 \times 3^3 = 108$. $\frac{10}{108} + \frac{21}{108} = \frac{31}{108}$. 31 est premier et ne divise pas $108 = 2^2 \times 3^3$: le résultat est irréductible.

(b) Faux. Contre-exemple : 7 est premier, mais $\frac{7}{98} = \frac{7}{2\times7^2} = \frac{1}{14}$. La fraction n'est irréductible que si ce nombre premier ne divise pas le dénominateur.

(c) Vrai. $69 = 3 \times 23$ et $1\,587 = 3 \times 529 = 3 \times 23^2$, donc $\frac{1\,587}{69} = \frac{3\times23^2}{3\times23} = 23$.

(d) Faux. $221 = 13 \times 17$ et $323 = 17 \times 19$ ont le facteur commun 17 : $\frac{221}{323} = \frac{13}{19}$. Les critères de divisibilité ne suffisent pas.

(e) Vrai. $\frac{35}{48} \times \frac{64}{63} = \frac{5\times7\times2^6}{2^4\times3\times3^2\times7}$. Je supprime 2^4 et 7 : il reste $\frac{5\times2^2}{3^3} = \frac{20}{27}$.

Ex. 28 ★★★ **Le code de l'escape game**

(a) Ce n'est pas fini : 308 et 572 sont encore pairs. $\frac{308}{572} = \frac{154}{286} = \frac{77}{143}$ (deux fois par 2). Les critères pour 2, 3 et 5 ne marchent plus, mais $77 = 7 \times 11$ et $143 = 11 \times 13$: je divise par 11 et j'obtiens $\frac{7}{13}$. Vérification : $616 = 2^3 \times 7 \times 11$ et $1\,144 = 2^3 \times 11 \times 13$, il fallait supprimer 2 trois fois et 11. Il ne reste aucun facteur commun : $\frac{7}{13}$ est irréductible.

(b) La fraction s'écrit $\frac{7\times k}{13\times k}$ avec $7k + 13k = 20k = 380$, donc $k = 19$. La fraction cherchée est $\frac{133}{247}$.

(c) $\frac{616}{1\,144} = \frac{7}{13}$ et $1\,859 = 11 \times 13^2$, $77 = 7 \times 11$.
Donc $\frac{7}{13} \times \frac{11\times13^2}{7\times11} = 13$ après avoir supprimé 7, 11 et un facteur 13. Le produit est égal à l'entier 13.

5. *Partages, rendez-vous et engrenages : diviseurs et multiples communs*

Ex. 29 ★☆☆ **Diviseurs et multiples communs à partir des décompositions**

(a) Facteurs communs, avec le plus petit exposant : $2^2 \times 3 = 12$.

(b) Tous les facteurs, avec le plus grand exposant : $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2\,520$.

(c) C et D n'ont aucun facteur premier commun : leur plus grand diviseur commun est 1.

(d) $C \times D = 455 \times 66 = 30\,030$. C et D n'ont aucun facteur premier commun : le plus petit multiple commun prend chaque facteur une fois, $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 30\,030$. Oui, ici c'est bien $C \times D$.

(e) $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $126 = 2 \times 3^2 \times 7$. Plus grand diviseur commun : $2 \times 3 \times 7 = 42$.

(f) Non. $20 = 2^2 \times 5$ et $28 = 2^2 \times 7$. Le plus petit multiple commun est $2^2 \times 5 \times 7 = 140$. 560 est bien un multiple commun, mais pas le plus petit : Yanis a tort.

Ex. 30 ★☆☆ **Partager ou se retrouver ?**

(a) Partage → diviseur commun. $56 = 2^3 \times 7$ et $70 = 2 \times 5 \times 7$: $2 \times 7 = 14$. Il fait 14 bouquets de 4 roses et 5 tulipes.

(b) Rendez-vous → multiple commun. $25 = 5^2$ et $40 = 2^3 \times 5$: $2^3 \times 5^2 = 200$ min, soit 3 h 20 min. Ils repartent ensemble à 11 h 10.

(c) « Le plus de sachets » → diviseur commun. $64 = 2^6$ et $96 = 2^5 \times 3$: plus petit exposant, $2^5 = 32$. Elle fait 32 sachets de 2 caramels et 3 sucettes.

(d) Rendez-vous → multiple commun. $50 = 2 \times 5^2$ et $75 = 3 \times 5^2$: $2 \times 3 \times 5^2 = 150$ s (et non $50 \times 75 = 3\,750$ s). Ils repassent ensemble au bout de 2 min 30 s.

Ex. 31 ★★☆ **Le carrelage de Malik**

(a) $330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$ et $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$.

(b) Oui : $330 = 15 \times 22$ et $210 = 15 \times 14$, donc 15 est un diviseur commun. Mais ce n'est pas forcément le plus grand.

(c) Il faut le plus grand diviseur commun : facteurs communs $2 \times 3 \times 5 = 30$. Le plus grand carreau possible mesure 30 cm de côté.

(d) $330 \div 30 = 11$ et $210 \div 30 = 7$, donc $11 \times 7 = 77$. Il faut 77 carreaux.

Ex. 32 ★★☆ **Le vélo de Sacha**

(a) $48 = 2^4 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$.

(b) Non. Tous les facteurs, avec le plus grand exposant : $2^4 \times 3^2 = 144$. Les repères se retrouvent pour la première fois après 144 dents. 864 est un multiple commun, mais pas le plus petit.

(c) $144 \div 48 = 3$ et $144 \div 18 = 8$: le plateau fait 3 tours et le pignon 8 tours.

(d) $15 \times 48 = 720$ dents, et $720 = 144 \times 5$ est un multiple commun de 48 et 18 (le pignon a fait $720 \div 18 = 40$ tours). Oui, les repères sont de nouveau à leur position de départ.

Ex. 33 ★★★ **Les colis de l'association**

(a) $1\,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ et $1\,512 = 2^3 \times 3^3 \times 7$.

(b) Non. Tout utiliser sans reste veut dire que le nombre de colis divise 1 260 et 1 512 : c'est un diviseur commun. Un multiple commun ferait au moins 1 512 colis, plus de colis que de cahiers. Noé a tort.

(c) On garde les facteurs communs avec le plus petit exposant : $2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$. De plus, $1\,260 \div 252 = 5$ et $1\,512 \div 252 = 6$. L'association prépare au maximum 252 colis, chacun avec 5 cahiers et 6 stylos.

(d) $1\,260 = 24 \times 52 + 12$: le reste n'est pas nul, donc 24 ne divise pas 1 260 (pourtant $1\,512 = 24 \times 63$). Ce n'est pas possible : 24 n'est pas un diviseur commun.

Ex. 34 ★★★ **Les deux phares**

(a) $45 = 3^2 \times 5$ et $105 = 3 \times 5 \times 7$.

(b) 15 est le plus grand diviseur commun : au bout de 15 s, aucun phare ne s'est rallumé. Il faut un multiple commun : tous les facteurs, avec le plus grand exposant, $3^2 \times 5 \times 7 = 315$. Or $315 = 5 \times 60 + 15$. Ils se rallument ensemble au bout de 315 s, soit 5 min 15 s.

(c) $3 \times 315 = 945$ et $945 = 15 \times 60 + 45$. La troisième fois, ils s'allument ensemble à 21 h 15 min 45 s.

(d) Une heure dure 3 600 s et $3\,600 = 315 \times 11 + 135$. Ils s'allument ensemble 11 fois après 21 h et avant 22 h.

Ex. 35 ★★★ **L'horloge de Lina**

(a) $54 = 2 \times 3^3$ et $72 = 2^3 \times 3^2$.

(b) On cherche le plus petit multiple commun : tous les facteurs, avec le plus grand exposant, $2^3 \times 3^3 = 216$. Les repères se retrouvent après 216 dents.

(c) $216 \div 54 = 4$ et $216 \div 72 = 3$. La roue de 54 dents fait 4 tours et celle de 72 dents fait 3 tours.

Ex. 35 **(suite)**

(d) 2 tours donnent $2 \times 54 = 108 = 2^2 \times 3^3$ dents. Le nombre de dents de C divise 108 : entre 20 et 50, il y a 27 et 36. Pour $27 = 3^3$, le plus petit multiple commun avec 54 est 54 : ils se retrouvent dès le 1er tour. Pour $36 = 2^2 \times 3^2$, on obtient $2^2 \times 3^3 = 108$. La roue C a 36 dents.

(e) $108 \div 36 = 3$. La roue C fait 3 tours.

6. *PGCD et algorithme d'Euclide (complément)*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : les divisions d'Euclide (complément)**

(a) $888 = 312 \times 2 + 264$.

(b) On divise le diviseur 93 par le reste 62 : $93 = 62 \times 1 + 31$.

(c) Le dernier reste non nul est 34, donc PGCD $(1\,598\,;646) = 34$. Ce n'est ni 0 ni un quotient.

(d) Le reste est nul, donc 345 divise 2 415 : PGCD $(2\,415\,;345) = 345$, et pas 7.

(e) $4\,199 = 1\,547 \times 2 + 1\,105$; $1\,547 = 1\,105 \times 1 + 442$; $1\,105 = 442 \times 2 + 221$; $442 = 221 \times 2 + 0$. Le dernier reste non nul est 221 : PGCD$(4\,199\,;1\,547) = 221$.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : premiers entre eux (complément)**

(a) $55 = 5 \times 11$ et $84 = 2^2 \times 3 \times 7$: aucun facteur premier commun, donc PGCD $= 1$. Ils sont premiers entre eux, sans être premiers.

(b) Faux : $91 = 7 \times 13$ et $65 = 5 \times 13$, donc PGCD $(91\,;65) = 13$.

(c) Faux : $27 = 3^3$ et $64 = 2^6$ n'ont aucun facteur premier commun, donc PGCD $= 1$. Pourtant, ni 27 ni 64 n'est premier.

(d) Ces deux nombres sont consécutifs. Un diviseur commun diviserait leur différence, qui vaut 1 : PGCD $(2\,026\,;2\,027) = 1$.

(e) Il ne doit être divisible ni par 2 ni par 3. Parmi $20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28$ et 30, seul $25 = 5^2$ convient.

Ex. 38 ★★☆ **Hugo et les soustractions successives (complément)**

(a) $168 - 72 = 96$; $96 - 72 = 24$; $72 - 24 = 48$; $48 - 24 = 24$. On arrive à 24 et 24, donc PGCD $(168\,;72) = 24$.

Ex. 38 **(suite)**

(b) $168 = 72 \times 2 + 24$; $72 = 24 \times 3 + 0$. Le dernier reste non nul est 24. Il faut seulement 2 divisions contre 4 soustractions : Euclide va plus vite.

(c) $168 = 2^3 \times 3 \times 7$ et $72 = 2^3 \times 3^2$. Les facteurs communs, pris au plus petit exposant, donnent $2^3 \times 3 = 24$.

(d) $\frac{168}{72} = \frac{168 \div 24}{72 \div 24} = \frac{7}{3}$, qui est irréductible car 7 et 3 sont premiers entre eux.

Ex. 39 ★★☆ **L'erreur de Nadia (complément)**

(a) Non. Ses divisions sont justes, mais 6 est le dernier quotient. Le PGCD est le dernier reste non nul : PGCD $(1\,254\,;494) = 38$.

(b) $\frac{1\,254}{494} = \frac{1\,254 \div 38}{494 \div 38} = \frac{33}{13}$.

(c) $33 = 13 \times 2 + 7$; $13 = 7 \times 1 + 6$; $7 = 6 \times 1 + 1$; $6 = 1 \times 6 + 0$. Le dernier reste non nul est 1 : 33 et 13 sont premiers entre eux, donc $\frac{33}{13}$ est irréductible.

Ex. 40 ★★★ **Les boîtes du chocolatier (complément)**

(a) $2\,418 = 1\,365 \times 1 + 1\,053$; $1\,365 = 1\,053 \times 1 + 312$; $1\,053 = 312 \times 3 + 117$; $312 = 117 \times 2 + 78$; $117 = 78 \times 1 + 39$; $78 = 39 \times 2 + 0$. Le dernier reste non nul est 39 (pas le dernier quotient 2) : PGCD $(2\,418\,;1\,365) = 39$.

(b) Le nombre de boîtes doit diviser 2 418 et 1 365. Le plus grand est leur PGCD : 39 boîtes. $2\,418 \div 39 = 62$ et $1\,365 \div 39 = 35$: chaque boîte contient 62 truffes et 35 pralines.

(c) $\frac{1\,365}{2\,418} = \frac{1\,365 \div 39}{2\,418 \div 39} = \frac{35}{62}$, irréductible car on a divisé par le PGCD. Mais $35 = 5 \times 7$ et $62 = 2 \times 31$ ne sont pas premiers : ils sont seulement premiers entre eux, puisqu'ils n'ont aucun facteur premier commun.

(d) La division de 1 365 par 1 053 est la deuxième ligne de la première question : la suite de l'algorithme est la même, donc PGCD$(1\,365\,;1\,053) = 39$. Il peut encore faire 39 boîtes, avec $1\,053 \div 39 = 27$ truffes et $1\,365 \div 39 = 35$ pralines dans chacune.

Ex. 41 ★★★ **Les affirmations du club de maths (complément)**

(a) Non. Le reste est nul dès la première division : 357 divise 4 284. Le dernier reste non nul est donc le diviseur 357, et 12 n'est que le quotient. PGCD $(4\,284\,;357) = 357$.

Ex. 41 (suite)

(b) Vrai. Un diviseur commun divise leur différence $1\,003 - 1\,001 = 2$, donc il vaut 1 ou 2. Or 1 001 et 1 003 sont impairs, donc non divisibles par 2 : PGCD $(1\,001 ; 1\,003) = 1$. Ils sont premiers entre eux, mais aucun n'est premier : $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$ et $1\,003 = 17 \times 59$.

(c) Non. $2\,025 = 1\,573 \times 1 + 452$; $1\,573 = 452 \times 3 + 217$; $452 = 217 \times 2 + 18$; $217 = 18 \times 12 + 1$; $18 = 1 \times 18 + 0$. Le dernier reste non nul est 1 : ils sont premiers entre eux, bien que $2\,025 = 3^4 \times 5^2$ et $1\,573 = 11^2 \times 13$ soient composés.

(d) $4\,641 - 4\,284 = 357$. Euclide : $4\,641 = 4\,284 \times 1 + 357$, puis $4\,284 = 357 \times 12 + 0$. Le dernier reste non nul est 357 : PGCD$(4\,641 ; 4\,284) = 357$.
Donc $\frac{4\,284}{4\,641} = \frac{4\,284 \div 357}{4\,641 \div 357} = \frac{12}{13}$, qui est irréductible.

Ex. 42 ★★★ La terrasse de Yanis (complément)

(a) Après la première division, Yanis divise encore 1 152 alors qu'il faut diviser le diviseur 448 par le reste 256. Or $448 = 128 \times 3 + 64$: 128 ne divise pas 448, il ne convient pas. Correction : $1\,152 = 448 \times 2 + 256$; $448 = 256 \times 1 + 192$; $256 = 192 \times 1 + 64$; $192 = 64 \times 3 + 0$. Le dernier reste non nul est 64 : PGCD$(1\,152 ; 448) = 64$.

(b) Le côté doit diviser 1 152 et 448 ; le plus grand est leur PGCD : 64 cm. $1\,152 \div 64 = 18$ et $448 \div 64 = 7$, donc il faut $18 \times 7 = 126$ carreaux.

(c) $1\,152 = 2^7 \times 3^2$ et $448 = 2^6 \times 7$. Le seul facteur premier commun est 2, au plus petit exposant 6 : $2^6 = 64$. On retrouve un côté de 64 cm.

(d) Les côtés possibles sont les diviseurs communs, c'est-à-dire les diviseurs du PGCD 64. $64 = 32 \times 2$: les carreaux de 32 cm conviennent. $64 = 48 \times 1 + 16$: 48 ne divise pas 64 (d'ailleurs $448 = 48 \times 9 + 16$), donc les carreaux de 48 cm ne conviennent pas.

7. *Exercices type brevet*

Ex. 43 ★☆☆ Automatismes : décomposer et tester

(a) $588 = 2 \times 294 = 2 \times 2 \times 147$ et $147 = 3 \times 49 = 3 \times 7 \times 7$, donc $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$.

(b) $1 + 0 + 8 + 9 = 18$: divisible par 9. $1\,089 = 9 \times 121 = 3^2 \times 11^2$.

(c) Ni 2, ni 3, ni 5, ni 7, ni 11, ni 13 ne divisent 391, mais $391 = 17 \times 23$: 391 est composé.

Ex. 43 (suite)

(d) Non : $49 = 7 \times 7$ n'est pas un nombre premier. La décomposition est $343 = 7 \times 7 \times 7 = 7^3$. Léa a tort.

(e) $2^3 \times 5 \times 13 = 8 \times 65 = 520$.

(f) 97 n'est divisible ni par 2, ni par 3 $(9 + 7 = 16)$, ni par 5, ni par 7 $(97 = 7 \times 13 + 6)$. Comme $11^2 = 121 > 97$, on s'arrête : 97 est premier.

Ex. 44 ★☆☆ Automatismes : lire des décompositions

(a) $A = 8 \times 9 \times 5 = 360$ et $B = 4 \times 3 \times 7 = 84$.

(b) Facteurs communs 2 et 3, au plus petit exposant : $2^2 \times 3 = 12$.

(c) Tous les facteurs, au plus grand exposant : $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2\,520$.

(d) Non : le facteur 3 est dans $B = 2^2 \times 3 \times 7$ et dans $C = 3 \times 5^2 \times 11$. 3 est donc un diviseur commun de B et C, et c'est le plus grand. Mia a tort.

(e) Oui : chacun de ses facteurs est dans A avec un exposant au moins aussi grand. D'ailleurs $360 = 90 \times 4$.

(f) Non : B ne contient 3 qu'une seule fois, pas 3^2. D'ailleurs $3^2 \times 7 = 63$ et $84 = 63 \times 1 + 21$.

Ex. 45 ★★☆ Vrai ou faux autour d'un programme de calcul

(a) $5 \times 5 + 5 + 41 = 71$. 71 n'est divisible ni par 2, ni par 3 $(7 + 1 = 8)$, ni par 5, ni par 7 $(71 = 7 \times 10 + 1)$. Comme $11^2 = 121 > 71$, on s'arrête : 71 est premier.

(b) Avec 8 : $8 \times 8 + 8 + 41 = 113$. Le résultat augmente quand le nombre de départ augmente, donc c'est le seul : le nombre de départ est 8.

(c) Vrai : $40 \times 40 + 40 + 41 = 1\,681 = 41 \times 41 = 41^2$.

(d) Faux : trois exemples ne suffisent pas. Avec 40, on obtient $1\,681 = 41 \times 41$: 41 est un diviseur de 1 681, qui n'est donc pas premier. Ce contre-exemple suffit : Zoé a tort.

Ex. 46 ★★☆ Former des équipes pour un cross

(a) $168 = 2^3 \times 3 \times 7$ et $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$.

(b) Non : $168 = 8 \times 21$ marche, mais $252 = 8 \times 31 + 4$. 8 ne divise pas 252, donc on ne peut pas former 8 équipes.

(c) Le nombre d'équipes est un diviseur commun. Facteurs communs au plus petit exposant : $2^2 \times 3 \times 7 = 84$. On forme au maximum 84 équipes de $168 \div 84 = 2$ filles et $252 \div 84 = 3$ garçons.

Ex. 46 **(suite)**

(d) Avec 84 équipes, il n'y a que 5 élèves par équipe : trop peu. Il y a 420 élèves, donc il faut au plus $420 \div 10 = 42$ équipes. 42 divise 84 : il forme 42 équipes de 4 filles et 6 garçons, soit 10 élèves.

Ex. 47 ★★★ **Le plateau et le pignon d'un vélo**

(a) $48 = 2^4 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$.

(b) Les repères se retrouvent quand le nombre de dents passées est un multiple commun de 48 et 18. Le plus petit, c'est tous les facteurs avec le plus grand exposant : $2^4 \times 3^2 = 144$. 864 est bien un multiple commun, mais pas le plus petit. Hugo a tort : les repères se retrouvent pour la première fois après 144 dents.

(c) $144 \div 48 = 3$ et $144 \div 18 = 8$. Le plateau a fait 3 tours et le pignon 8 tours.

(d) En 5 tours, le plateau fait passer $5 \times 48 = 240$ dents. Le pignon fait 12 tours pour ces 240 dents : $240 \div 12 = 20$. On vérifie : $20 = 2^2 \times 5$, et le plus petit multiple commun de 48 et 20 vaut $2^4 \times 3 \times 5 = 240$. Le nouveau pignon a 20 dents.

Ex. 48 ★★★ **Daller une terrasse sans découpe**

(a) $756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$ et $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$.

(b) Le côté doit être un diviseur commun de 756 et 540. Le plus grand : facteurs communs avec le plus petit exposant, $2^2 \times 3^3 = 108$. Il faut $756 \div 108 = 7$ dalles sur la longueur et $540 \div 108 = 5$ sur la largeur, soit $7 \times 5 = 35$ dalles. Le plus grand côté est 108 cm, avec 35 dalles.

(c) $540 = 45 \times 12$, mais 756 ne se termine ni par 0 ni par 5, donc il n'est pas divisible par 5, ni par 45 : $756 = 45 \times 16 + 36$. Ce n'est pas possible : il faudrait découper des dalles.

(d) Les diviseurs communs sont les diviseurs de 108 : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108. Entre 30 et 60, il reste 36 et 54. Avec 36 cm : $21 \times 15 = 315$ dalles. Avec 54 cm : $14 \times 10 = 140$ dalles. Samir doit prendre des dalles de 54 cm : il lui en faut 140.

Ex. 49 ★★★ **Une feuille de tableur qui compte les diviseurs**

(a) 1 n'a qu'un seul diviseur, lui-même : le tableur affiche 1. Un nombre premier a exactement deux diviseurs. Inès a tort : 1 n'est pas premier.

Ex. 49 **(suite)**

(b) $187 = 11 \times 17$: 11 est un diviseur de 187, donc 187 n'est pas premier, c'est un nombre composé. Ses diviseurs sont 1, 11, 17 et 187 : le tableur affiche 4.

(c) $13^2 = 169 < 199$ et $17^2 = 289 > 199$: on essaie 2, 3, 5, 7, 11 et 13. 199 est impair ; la somme de ses chiffres vaut 19, donc il n'est pas divisible par 3 ; il ne se termine ni par 0 ni par 5. $199 = 7 \times 28 + 3$, $199 = 11 \times 18 + 1$ et $199 = 13 \times 15 + 4$. Aucun ne divise 199 : il est premier, donc le tableur affiche 2.

(d) Faux. Contre-exemple : $3 \times 3 = 9$, et 9 n'a que 3 diviseurs : 1, 3 et 9. Le tableur affiche 3 à côté de 9, et non 4.

(e) $196 = 2^2 \times 7^2$. Un diviseur s'écrit $2^a \times 7^b$ avec 3 choix pour a (0, 1, 2) et 3 choix pour b :

$\times$	**1**	**7**	**49**
1	1	7	49
2	2	14	98
4	4	28	196

On obtient $3 \times 3 = 9$ diviseurs : le tableur affiche 9 à côté de 196.