49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Rappels de 3e : multiples, diviseurs, critères de divisibilité, nombres premiers

À retenir : Pour lister les diviseurs de a, je teste d jusqu'à ce que $d \times d > a$. Critère de 4 : les deux derniers chiffres. 1 n'est pas premier ; 2 est le seul premier pair. Divisible par 9 $\Rightarrow$ par 3, mais pas l'inverse : 12.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : multiples et diviseurs** — Calcule et justifie chaque réponse en une ligne.

(a) Donne le reste de la division euclidienne de 254 par 9. 254 est-il un multiple de 9 ?

(b) Écris 168 sous la forme $12 \times k$ avec k entier.

(c) Inès affirme que 316 n'est pas divisible par 4, car 6 n'est pas un multiple de 4. A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Hugo affirme que 2 506 est divisible par 3, car son chiffre des unités 6 l'est. A-t-il raison ? Justifie.

(e) Liste tous les diviseurs positifs de 84 par paires.

(f) Donne le plus grand multiple de 13 inférieur ou égal à 200.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : nombres premiers et décomposition** — Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement deux diviseurs positifs. Réponds en justifiant.

(a) 1 est-il un nombre premier ? Justifie.

(b) Léa affirme : « Tous les nombres premiers sont impairs. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Montre que 51 et 57 ne sont pas des nombres premiers.

(d) Écris la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 30.

(e) Décompose 360 en produit de facteurs premiers.

(f) Tom écrit : « $60 = 3 \times 4 \times 5$ est la décomposition de 60 en facteurs premiers. » Corrige son erreur.

Ex. 3 ★★☆ **Tableau de divisibilité et fausses implications** — Recopie et complète le tableau par « oui » ou « non » à l'aide des critères de divisibilité, puis réponds.

Nombre	2	3	4	9
714	…	…	…	…
1 026	…	…	…	…
3 105	…	…	…	…
2 148	…	…	…	…

(a) Complète le tableau en citant le critère utilisé pour chaque colonne.

(b) Zoé affirme : « 714 est divisible par 3, donc il est divisible par 9. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Montre que tout multiple de 9 est un multiple de 3.

(d) 2 148 est divisible par 2 et par 4. Est-il divisible par 8 ? Justifie.

(e) 714 est divisible par 2 et par 3. Écris 714 sous la forme $6 \times k$ avec k entier.

Ex. 4 ★★☆ **Les bouquets de la fleuriste** — Une fleuriste de Nantes dispose de 156 roses et de 234 tulipes. Elle veut composer des bouquets identiques (même nombre de roses et même nombre de tulipes dans chacun), en utilisant toutes ses fleurs.

(a) Décompose 126 et 210 en produits de facteurs premiers.

(b) Déduis-en le plus grand nombre de bouquets qu'elle peut composer.

(c) Combien de roses et combien de tulipes contient alors chaque bouquet ?

(d) Elle hésite entre 26 et 36 bouquets. Lequel de ces choix est possible ? Justifie.

Ex. 5 ★★★ **Premier ou pas ? Enquête jusqu'à la racine** — Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement deux diviseurs positifs. Pour chaque question, rédige une justification complète.

(a) Soit n un entier pair tel que $n \geqslant 4$. Montre que n n'est pas premier. Déduis-en que 2 est le seul nombre premier pair.

(b) Nina affirme : « 119 est premier : il est impair, ne se termine pas par 5 et n'est pas divisible par 3. » Montre qu'elle a tort.

(c) Détermine si 437 est premier en testant les nombres premiers dans l'ordre. Précise jusqu'où tu dois aller et pourquoi.

Ex. 5 **(suite)**

(d) Montre que 409 est premier. Indique les nombres premiers testés et le critère d'arrêt.

(e) Que renvoient `est_premier(1)`, `est_premier(2)`, `est_premier(437)` et `est_premier(409)` ? À quoi sert `n >= 2` ?

```
def est_premier(n):
    d = 2
    while d * d <= n:
        if n % d == 0:
            return False
        d = d + 1
    return n >= 2
```

Ex. 6 ★★★ **Le nombre aux deux chiffres cachés** — a et b désignent deux chiffres (de 0 à 9). On note N le nombre à cinq chiffres qui s'écrit $6\,1\,a\,4\,b$. Par exemple, pour $a = 2$ et $b = 5$, on a $N = 61\,425$.

(a) Noé affirme : « N est divisible par 4 dès que b est pair. » Montre qu'il a tort, puis trouve toutes les valeurs de b pour lesquelles N est divisible par 4.

(b) Sacha affirme : « N est divisible par 3 dès que b est un multiple de 3. » A-t-il raison ? Justifie avec un exemple de N.

(c) Détermine toutes les valeurs de N qui sont divisibles à la fois par 4 et par 9.

(d) Vérifie que $N = 100 \times (610 + a) + 40 + b$. Déduis-en que, si $40 + b$ est un multiple de 4, alors N est un multiple de 4.

(e) Pour $a = 7$ et $b = 0$, décompose N en produit de facteurs premiers, en utilisant d'abord les critères de divisibilité.

Ex. 7 ★★★ **Le carreleur de Grenoble** — À Grenoble, un carreleur doit couvrir le sol rectangulaire d'une salle de 378 cm sur 294 cm. Il veut utiliser des dalles carrées identiques, dont le côté est un nombre entier de centimètres, sans aucune découpe ni chevauchement.

(a) Décompose 378 et 294 en produits de facteurs premiers.

(b) Le côté des dalles doit être le plus grand possible. Détermine ce côté à l'aide des décompositions. Justifie.

(c) Combien de dalles le carreleur doit-il poser avec ce côté ?

(d) Le magasin ne vend plus que des dalles de côté 25 cm au plus. Liste par paires les diviseurs positifs du côté trouvé plus haut. Déduis-en le plus grand côté possible et le nombre de dalles.

(e) Ben affirme : « En divisant le côté par 2, il faut 2 fois plus de dalles. » Compare les deux résultats précédents : a-t-il raison ? Justifie.

2. *Multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$*

À retenir : a est un multiple de b s'il existe un entier k tel que $a = b \times k$: $-52 = 4 \times (-13)$. 0 est un multiple de tout entier, mais 0 ne divise aucun entier. Pour un « non », donne le reste non nul. Le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b vaut $b - r$.

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et multiples** — Réponds en une ligne. Justifie avec une égalité ou une phrase courte.

(a) Complète par $\in$ ou $\notin$: -9 … $\mathbb{N}$ et -9 … $\mathbb{Z}$.

(b) Complète par $\in$ ou $\notin$: $\frac{36}{4}$ … $\mathbb{N}$ et $\frac{-20}{5}$ … $\mathbb{N}$.

(c) Écris -84 sous la forme $12 \times k$, avec k entier.

(d) Le nombre -8 divise-t-il 96 ? Justifie avec une égalité.

(e) Vrai ou faux : « 0 est un multiple de 23 ». Justifie.

(f) Le nombre 0 est-il un diviseur de 15 ? Justifie.

(g) On lit « 9 divise 117 ». Réécris cette phrase avec le mot « multiple ».

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : oui ou non, avec la preuve** — Réponds en une ligne, avec une égalité, un reste ou un encadrement.

(a) Montre que 247 est un multiple de 13.

(b) Calcule le reste de la division euclidienne de 500 par 19. Est-ce que 19 divise 500 ?

(c) Encadre 290 entre deux multiples consécutifs de 11. 290 est-il un multiple de 11 ?

(d) La calculatrice affiche $400 \div 27 \approx 14{,}81$. Donne le plus grand multiple de 27 inférieur ou égal à 400.

(e) Donne le plus grand multiple de 16 inférieur ou égal à 250.

(f) Lina affirme que le plus grand multiple de 8 inférieur ou égal à 344 est 336. A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 10 ★★☆ **Listes de diviseurs à vérifier** — Inès donne cette liste des diviseurs positifs de 196 : 1, 2, 4, 7, 14, 14, 28, 49, 98.

(a) Trouve les deux erreurs d'Inès.

(b) Pour lister les diviseurs positifs de 196, jusqu'à quelle valeur de d faut-il tester ? Justifie.

(c) Donne la liste correcte des diviseurs positifs de 196, puis le nombre de diviseurs de 196 dans $\mathbb{Z}$.

(d) Pour 143, Hugo teste d de 1 à 10 seulement. Il ne trouve que 1 et 143, et conclut que 143 est premier. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 11 ★★☆ **Python : corriger des erreurs** — Ben veut une fonction qui renvoie le plus grand multiple de `a` inférieur ou égal à `b`, avec `a` $\geqslant 1$. Il écrit :

```
def plus_grand_multiple(a, b):
    m = 0
    while m <= b:
        m = m + a
    return m
```

(a) Pour tester si `a` est un multiple de `b`, Mattéo écrit `a % b = 0` et Zoé écrit `a / b == 0`. Corrige-les.

(b) Que renvoie `plus_grand_multiple(7, 30)` avec le programme de Ben ? Explique pourquoi c'est faux.

(c) Corrige la condition du `while`, puis donne ce que renvoie alors `plus_grand_multiple(7, 30)`.

(d) Avec le programme corrigé, combien de tours de boucle fait l'appel `plus_grand_multiple(7, 30)` ? Justifie.

(e) Avec le programme corrigé, que renvoie `plus_grand_multiple(9, 5)` ? Ce résultat est-il bien un multiple de 9 ? Justifie.

Ex. 12 ★★★ **Problème : les chaises du concert** — Pour un concert à Rennes, Camille doit placer 384 chaises en rangées qui ont toutes le même nombre de chaises.

(a) Liste les diviseurs positifs de 384 par paires. Précise à quelle valeur de d tu t'arrêtes et pourquoi.

(b) Ben veut entre 10 et 20 chaises par rangée, et entre 20 et 30 rangées. Trouve toutes les dispositions possibles. Justifie.

(c) Léon propose des rangées de 23 chaises. Il calcule $384 \div 23 \approx 16{,}7$ et annonce 17 rangées complètes. A-t-il raison ? Donne le plus grand multiple de 23 inférieur ou égal à 384, puis le nombre de chaises restantes.

(d) Combien de chaises faut-il ajouter au minimum pour que toutes les chaises forment des rangées complètes de 23 ? Justifie.

Ex. 13 ★★★ **Python : les paires de diviseurs de 225** — Lucie écrit cette fonction pour afficher les paires de diviseurs positifs d'un entier `a` $\geqslant 1$:

```
def diviseurs(a):
    d = 1
    while d * d <= a:
        if a % d == 0:
            print(d, a // d)
        d = d + 1
```

(a) Écris exactement ce qu'affiche `diviseurs(225)`.

(b) Combien de tours de boucle sont effectués pour `a` $= 225$? Justifie.

(c) Lucie dit que 225 a 10 diviseurs positifs, car il y a 5 paires. A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Montre que s'arrêter dès que $d \times d > 225$ ne fait manquer aucun diviseur.

(e) Lucie remplace `d * d <= a` par `d <= a`. Combien de tours fait alors la boucle pour `a` $= 225$? Qu'est-ce qui change dans l'affichage ?

Ex. 14 ★★★ **Dans $\mathbb{Z}$: signes, zéro et sens de la phrase** — Dans cet exercice, tous les nombres sont des entiers relatifs. Rédige chaque justification avec une égalité $a = b \times k$ où k est un entier.

(a) Montre que -26 divise 260. Le quotient $\frac{260}{-26}$ appartient-il à $\mathbb{N}$? Appartient-il à $\mathbb{Z}$?

(b) Vrai ou faux : « 0 et 260 ont les mêmes diviseurs positifs ». Justifie.

(c) Nadia écrit : « $260 = 13 \times 20$, donc 260 divise 13 ». Corrige sa phrase, puis montre que 260 ne divise pas 13.

(d) Montre que -7 ne divise pas 260. Utilise deux multiples consécutifs de 7.

3. *Démontrer qu'un nombre est un multiple*

À retenir : Pour montrer qu'une expression est un multiple de n : je développe, je mets n en facteur, j'écris « K est un entier ». Une lettre par nombre : $a = 5k$, $b = 5k'$. Des exemples ne prouvent rien, un contre-exemple suffit à réfuter.

Ex. 15 ★☆☆ **Sommes, différences et critères** — Réponds à chaque question en justifiant.

(a) On donne $221 = 13 \times 17$ et $104 = 13 \times 8$. Écris $221 + 104$ et $221 - 104$ sous la forme $13 \times K$ avec K entier.

(b) Avec les nombres de la question précédente, justifie sans poser de division que $221 \times 6 + 104$ est un multiple de 13.

(c) Le nombre 7 452 est-il divisible par 4 ? par 9 ? Justifie avec les critères.

(d) Justifie que 0 et -104 sont des multiples de 13.

Ex. 16 ★☆☆ **Mettre n en facteur** — Dans tout l'exercice, n désigne un entier.

(a) Écris $14n + 21$ sous la forme $7 \times K$, avec K entier, et conclus.

(b) Développe et réduis $8n - 4(n - 5)$, puis montre que le résultat est un multiple de 4.

(c) Montre que $(n + 5)^2 - (n - 1)^2$ est un multiple de 12.

(d) Montre que $12n + 18$ est un multiple de 6, puis justifie que ce n'est pas toujours un multiple de 12.

(e) Montre que la somme des trois entiers consécutifs n, $n + 1$ et $n + 2$ est un multiple de 3.

Ex. 17 ★★☆ **Démontrer ou réfuter** — Vrai ou faux ? Justifie par une démonstration ou par un contre-exemple.

(a) « La somme de deux multiples de 3 est toujours un multiple de 6. »

(b) « Pour tout entier n, $(n + 2)^2 - n^2$ est un multiple de 8. »

Ex. 17 **(suite)**

(c) « La somme d'un multiple de 4 et d'un multiple de 6 est toujours un nombre pair. »

(d) Sami a vérifié que $2n^2 + 4$ est un multiple de 4 pour $n = 0$, $n = 2$ et $n = 4$. Il en conclut : « C'est vrai pour tout entier n. »

Ex. 18 ★★☆ **Une preuve à corriger, un nombre « abba »** — Inès veut montrer que la différence de deux multiples de 9 est un multiple de 9. Elle écrit : « $a = 9k$ et $b = 9k$, donc $a - b = 9k - 9k = 0 = 9 \times 0$. C'est un multiple de 9. »

(a) Explique pourquoi la démonstration d'Inès ne prouve pas la propriété.

(b) Rédige une démonstration correcte.

(c) Un nombre à quatre chiffres « abba », où $a \neq 0$ et b sont des chiffres, s'écrit $1000a + 100b + 10b + a$. Montre que c'est un multiple de 11.

(d) Déduis-en, sans poser de division, que 3 553 est un multiple de 11, puis donne le quotient.

Ex. 19 ★★★ **Des entiers consécutifs** — Dans tout l'exercice, n désigne un entier. Sofia calcule $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$, $11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 65$ et $20 + 21 + 22 + 23 + 24 = 110$. Elle affirme : « La somme de cinq entiers consécutifs est toujours un multiple de 5. C'est démontré. »

(a) Sofia a-t-elle démontré sa propriété ? Justifie.

(b) Montre que, pour tout entier n, la somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5.

(c) Vrai ou faux ? « La somme de quatre entiers consécutifs est toujours un multiple de 4. » Justifie.

(d) Pour $n \in \mathbb{N}$, écris $n + (n+1) + (n+2) + (n+3)$ sous la forme $4K + r$, avec K entier et $0 \leqslant r < 4$. Que peux-tu en conclure ?

(e) Montre que la somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4.

Ex. 20 ★★★ **Pourquoi le critère de divisibilité par 9 marche** — Un entier N à trois chiffres s'écrit « abc » : a est le chiffre des centaines ($a \neq 0$), b celui des dizaines et c celui des unités, donc $N = 100a + 10b + c$. On note M le nombre « cba », avec $c \neq 0$.

(a) Montre que $N - (a + b + c)$ est un multiple de 9.

(b) Déduis-en que si $a + b + c$ est un multiple de 9, alors N est un multiple de 9.

(c) Montre que $N - (a + b + c)$ est aussi un multiple de 3. Quel critère de divisibilité obtiens-tu ?

(d) Écris M en fonction de a, b et c, puis montre que $N - M$ est un multiple de 99. Attention aux signes.

(e) Vrai ou faux ? « $N + M$ est toujours un multiple de 101. » Justifie.

Ex. 21 ★★★ **Comme en DS : multiple de 3, de 6, de 40 ?** — Dans tout l'exercice, n désigne un entier relatif. Lina veut savoir si $6n + 15$ peut être un multiple de 6. Elle écrit la fonction ci-dessous. Yanis, lui, étudie les multiples de 10 et de 4.

(a) Montre que $6n + 15$ est un multiple de 3, puis explique pourquoi ce n'est jamais un multiple de 6.

(b)
```
def test(N):
    for n in range(N):
        if (6 * n + 15) % 6 == 0:
            return n
    return -1
```
Qu'affiche `print(test(1000))` ? Ce résultat suffit-il à démontrer la propriété ? Justifie.

(c) Yanis affirme : « Un entier qui est un multiple de 10 et de 4 est forcément un multiple de 40. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) Montre que le produit d'un multiple de 10 par un multiple de 4 est un multiple de 40. Choisis bien tes lettres.

4. *Pairs et impairs : démonstrations*

À retenir : Pair : $n = 2k$; impair : $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$, par exemple $-15 = 2 \times (-8) + 1$. On conclut par $2K$ ou $2K + 1$ en justifiant que K est entier. Deux impairs : $2k + 1$ et $2p + 1$. « Pour tout n » : cas pair, puis cas impair.

Ex. 22 ★☆☆ **Écrire sous la forme 2k ou 2k + 1** — Écris chaque nombre sous la forme $2K$ ou $2K + 1$ avec K entier, puis conclus : pair ou impair ? Dans les trois derniers items, k est un entier.

(a) 0 (b) -11 (c) -34

(d) 135 (e) $4k + 6$ (f) $8k + 5$

(g) $10k - 3$

Ex. 23 ★☆☆ **Parité sans poser le calcul** — Utilise le tableau de parité de la somme et du produit, ou un contre-exemple.

(a) Donne la parité de $357 + 849$ sans poser l'addition.

(b) Donne la parité de 357×849 sans poser la multiplication.

(c) Le produit $1\,246 \times 3\,579$ peut-il valoir 4 459 433 ? Justifie sans poser la multiplication.

(d) Les entiers 2 187 et 2 188 sont consécutifs. Donne la parité de leur produit, puis celle de leur somme.

(e) Pour `n = 4471`, que vaut `n % 2` ? Qu'affiche `print(n % 2 == 0)` ? Conclus sur la parité de 4 471.

(f) Sacha affirme : « Un entier impair s'écrit $3k$ avec k entier. » Est-ce vrai ? Justifie par un contre-exemple.

(g) Selon Noa, un nombre de la forme $k + 1$, avec k entier, est toujours impair. Est-ce vrai ? Justifie.

Ex. 24 ★★☆ **La démonstration d'Inès** — Inès veut montrer que la somme de deux entiers impairs est paire. Elle écrit : « Soit $a = 2k + 1$ et $b = 2k + 1$ deux impairs. Alors $a + b = 4k + 2 = 2(2k + 1)$, donc $a + b$ est pair. »

(a) Quelle erreur commet Inès ? Donne deux impairs que sa démonstration ne couvre pas.

(b) Rédige une démonstration correcte : pour tous impairs a et b, $a + b$ est pair.

(c) Soit a et b deux entiers impairs. Montre que $a \times b + a$ est pair.

(d) Vrai ou faux : « La somme de trois entiers impairs est paire. » Justifie.

Ex. 25 ★★☆ **Pour tout entier n : deux cas** — Dans tout l'exercice, n désigne un entier.

(a) Factorise $n^2 + n$, puis montre par disjonction des cas que $n^2 + n$ est pair pour tout entier n.

(b) Déduis-en la parité de $n^2 + 3n + 1$ pour tout entier n.

(c) Qu'affiche ce programme ? Explique ce résultat à l'aide de la question précédente.

```
c = 0
for n in range(51):
    if (n*n + 3*n + 1) % 2 == 0:
        c = c + 1
print(c)
```

(d) Vrai ou faux : « Pour tout entier n, $n + (n + 1)$ est pair. » Justifie.

Ex. 26 ★★★ **Impair au carré, moins un** — Dans tout l'exercice, n désigne un entier impair, sauf à la question 4.

(a) Écris $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Montre que $n^2 - 1 = 4k(k + 1)$.

(b) Explique pourquoi $k(k + 1)$ est pair. Déduis-en que $n^2 - 1$ est un multiple de 8.

(c) Pour $n = -7$, donne l'entier k tel que $-7 = 2k + 1$. Vérifie le résultat de la question 2 en calculant $(-7)^2 - 1$ et $4k(k + 1)$.

(d) Lucas affirme : « Si $n^2 - 1$ est un multiple de 8, alors n est impair. » A-t-il raison ? Justifie en étudiant le cas où n est pair.

(e) Sans calculer $2\,025^2$, justifie que $2\,025^2 - 1$ est un multiple de 8.

Ex. 27 ★★★ **Une expression dont la parité dépend de n** — Dans tout l'exercice, n désigne un entier et $A = n^2 + 2n + 7$.

(a) Complète le tableau, puis fais une conjecture sur la parité de A selon celle de n.

n	0	1	2	−3
A	…	…	…	…
Parité de A	…	…	…	…

Ex. 27 (suite)

(b) Démontre ta conjecture, en traitant le cas $n = 2k$ puis le cas $n = 2k + 1$, avec k entier.

(c) Que renvoie `compte(100)` ? Justifie sans exécuter le programme.

```
def compte(N):
    c = 0
    for n in range(N):
        if (n**2 + 2*n + 7) % 2 == 0:
            c = c + 1
    return c
```

(d) Le nombre 2 026 peut-il s'écrire $n^2 + 2n + 7$ avec n pair ? Justifie.

(e) Maël affirme : « Si A est pair, alors n est impair. » A-t-il raison ? Justifie à l'aide de la question 2.

Ex. 28 ★★★ **Somme des carrés de deux impairs** — Dans les questions 1 à 4, a et b désignent deux entiers impairs, pas forcément égaux.

(a) Yanis écrit $a = 2k - 1$ avec k entier. Justifie que cette écriture décrit bien un nombre impair.

(b) On écrit $a = 2k + 1$ et $b = 2p + 1$, avec k et p entiers. Écris $a^2 + b^2$ sous la forme $4M + 2$, avec M entier.

(c) Déduis-en que $a^2 + b^2$ est pair, mais n'est jamais un multiple de 4.

(d) Vérifie avec $a = 7$ et $b = 9$. Existe-t-il deux impairs dont la somme des carrés vaut 2 024 ? Justifie.

(e) Lina affirme : « Si a et b sont des entiers et si $a^2 + b^2$ est un multiple de 4, alors a et b sont pairs. » A-t-elle raison ? Justifie.

5. *Carré d'un pair, carré d'un impair*

À retenir : n et n^2 ont la même parité : $(2k)^2 = 4k^2$ est un multiple de 4, et $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. « Si n^2 est pair, alors n est pair » se démontre par la contraposée, pas par la réciproque. Un exemple ne démontre rien.

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : la parité d'un carré** — Réponds en une ou deux lignes. Justifie chaque réponse.

(a) Sans calculer 43^2, dis si ce nombre est pair ou impair.

(b) Sans calculatrice, dis si $(-34)^2$ est un multiple de 4.

(c) Léna écrit $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 1$. Corrige son calcul.

(d) Un entier n vérifie $n^2 = 2\,116$. Dis si n est pair ou impair.

(e) Un entier n vérifie $n^2 = 3\,025$. Dis si n est pair ou impair.

(f) Dis si 2 018 peut être le carré d'un entier pair.

Ex. 30 ★☆☆ **Tableau de parité de n et de n² —** Recopie et complète le tableau ligne par ligne, en justifiant chaque parité par une écriture $2K$ ou $2K+1$, avec K entier. Ici k est un entier.

n	n^2	**Parité de n**	**Parité de n^2**
-9	…	…	…
0	…	…	…
$2k$	…	…	…
$2k+1$	…	…	…

(a) Complète la ligne $n=-9$.

(b) Complète la ligne $n=0$.

(c) Complète la ligne $n=2k$ en écrivant n^2 sous la forme $2K$, où K est un entier.

(d) Complète la ligne $n=2k+1$ en écrivant n^2 sous la forme $2K+1$, où K est un entier.

(e) Que remarques-tu sur la parité de n et celle de n^2 ? Rédige une phrase.

Ex. 31 ★★☆ **Réciproque ou contraposée ? —** Hugo veut démontrer : « si n^2 est pair, alors n est pair ». Il écrit : « Soit n pair, $n=2k$. Alors $n^2=4k^2=2\times 2k^2$, donc n^2 est pair. »

(a) Quelle propriété Hugo a-t-il réellement démontrée ? Est-ce celle qu'il voulait ? Justifie.

(b) Énonce la contraposée de « si n^2 est pair, alors n est pair ».

(c) Démontre cette contraposée, puis conclus.

(d) Jade affirme : « si n^2 est un multiple de 4, alors n est un multiple de 4 ». Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 32 ★★☆ **Toujours pair, et même plus —** Dans cet exercice, n, k et p désignent des entiers.

(a) Montre que n^2+n est pair pour tout entier n, en traitant le cas où n est pair et le cas où n est impair.

(b) Déduis-en que n^2-n est pair pour tout entier n.

(c) Montre que n^2+3n+5 est impair pour tout entier n, en utilisant la première question.

(d) Soit $a=2k+1$ et $b=2p+1$ deux entiers impairs. Montre que $a^2-b^2=4(k^2+k)-4(p^2+p)$, puis que a^2-b^2 est un multiple de 8.

Ex. 33 ★★★ **Le carré d'un impair, moins 1 —** Dans cet exercice, n est un entier impair et k est un entier tel que $n=2k+1$.

(a) Lina calcule $3^2-1=8$, $5^2-1=24$ et $7^2-1=48$: ce sont tous des multiples de 8. Elle écrit : « C'est démontré pour tout impair. » A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Développe n^2-1 et montre que $n^2-1=4k(k+1)$.

(c) Justifie que $k(k+1)$ est pair pour tout entier k, en utilisant deux entiers consécutifs.

Ex. 33 **(suite)**

(d) Déduis-en que n^2-1 est un multiple de 8 pour tout entier impair n.

(e) Sans calculer $2\,027^2$, justifie que $2\,027^2-1$ est un multiple de 8, puis écris-le sous la forme $8\times K$, avec K entier.

Ex. 34 ★★★ **La somme de deux carrés impairs —** Dans cet exercice, a et b sont deux entiers impairs, pas forcément égaux, et k, p, q désignent des entiers.

(a) Malik pose $a=2k+1$ et $b=2k+1$. Explique son erreur, puis donne deux impairs que son calcul ne permet pas de traiter.

(b) On pose $a=2k+1$ et $b=2p+1$. Montre que $a^2+b^2=4(k^2+k+p^2+p)+2$.

(c) Déduis-en que a^2+b^2 est pair, mais que ce n'est pas un multiple de 4.

(d) Existe-t-il un entier c tel que $a^2+b^2=c^2$? Justifie, en étudiant d'abord la parité de c.

Ex. 35 ★★★ **Un carré s'écrit 4K ou 4K + 1 —** Dans cet exercice, n, k et K désignent des entiers.

(a) Soit n un entier impair, $n=2k+1$. Montre que n^2 s'écrit $4K+1$, avec K entier.

(b) Soit n un entier pair, $n=2k$. Montre que n^2 est un multiple de 4, et pas seulement de 2.

(c) Déduis-en que, pour tout entier n, le nombre n^2 s'écrit $4K$ ou $4K+1$, avec K entier.

(d) Sans chercher de racine carrée, justifie que 4 078 n'est le carré d'aucun entier.

(e) Gabin affirme : « 2 019 est la somme de deux carrés d'entiers. » A-t-il raison ? Justifie.

6. *Nombres premiers et décomposition*

À retenir : Un nombre premier a exactement deux diviseurs positifs : 1 n'est pas premier, 2 l'est. Pour tester n, on essaie 2, 3, 5, 7… tant que $p\times p\leqslant n$. On décompose avec des facteurs premiers seulement : $72=2^3\times 3^2$.

Ex. 36 ★☆☆ **Premier ou pas ? —** Réponds en justifiant brièvement.

(a) Le nombre 1 est-il premier ? Justifie.

(b) Sans calcul long, justifie que 358 n'est pas premier.

(c) Pour savoir si 127 est premier, Lina teste tous les entiers de 2 à 63. Quels diviseurs premiers suffit-il de tester ? Conclus.

(d) Montre que 143 n'est pas premier en l'écrivant comme produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

(e) Trouve le plus petit diviseur premier de 221.

Ex. 36 (suite)

(f) Écris 323 comme produit de deux nombres premiers.

(g) Liste les nombres premiers compris entre 100 et 120.

Ex. 37 ★☆☆ **Décompositions en facteurs premiers** — Écris les décompositions avec des puissances regroupées.

(a) Décompose 504 en facteurs premiers : divise successivement par 2, puis par 3, etc., en notant les quotients.

(b) Décompose 1 265 en produit de facteurs premiers.

(c) Calcule le nombre dont la décomposition est $2^4 \times 3 \times 5^2$.

(d) Théo écrit $600 = 4 \times 6 \times 25$ et dit que c'est sa décomposition en facteurs premiers. Corrige-le.

(e) Nora écrit $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ et Yanis écrit $180 = 5 \times 3^2 \times 2^2$. L'un des deux s'est-il trompé ? Justifie.

(f) Le nombre $A = 2^2 \times 3^4 \times 7^3$ est-il le carré d'un entier ? Justifie à l'aide des exposants, sans calculer A.

Ex. 38 ★★☆ **Une fraction à rendre irréductible** — On considère la fraction $\frac{1\,176}{1\,260}$.

(a) Décompose 1 176 et 1 260 en produits de facteurs premiers.

(b) Déduis-en le plus grand diviseur commun de 1 176 et 1 260.

(c) Rends la fraction $\frac{1\,176}{1\,260}$ irréductible. Justifie qu'elle l'est.

(d) Clara écrit $\frac{14+21}{14+35} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$ en barrant les 14. Explique son erreur et donne le bon résultat sous forme irréductible.

Ex. 39 ★★☆ **Un test de primalité en Python** — On considère la fonction suivante.

```
def premier(n):
    d = 2
    while d * d <= n:
        if n % d == 0:
            return False
        d = d + 1
    return n >= 2
```

(a) Que renvoient `premier(1)` et `premier(2)` ? Pour chacun, précise si on entre dans la boucle `while`.

(b) Donne les valeurs de `d` testées pour `premier(187)` et ce que renvoie la fonction.

(c) Pour `premier(131)`, avec quelle valeur de `d` la boucle s'arrête-t-elle ? Que renvoie la fonction ?

(d) Malo remplace la ligne `d = d + 1` par `d = d + 2`. Que renvoie alors `premier(15)` ? Ce résultat est-il correct ? Justifie.

(e) Ilan remplace `d * d <= n` par `d <= n // 2`. Pour `premier(97)`, combien de valeurs de `d` sont testées dans chaque version ? Laquelle est préférable ? Justifie.

Ex. 40 ★★★ **Quand $n^2 - 1$ est-il premier ?** — Dans cet exercice, n désigne un entier naturel.

(a) Développe $(n-1)(n+1)$.

(b) Calcule $n^2 - 1$ pour $n = 2$, $n = 14$ et $n = 20$, puis décompose chaque résultat en facteurs premiers à l'aide de la question précédente.

(c) Montre que, pour tout entier $n \geqslant 3$, le nombre $n^2 - 1$ n'est pas premier.

(d) On pose $N = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$. Montre que N est le carré d'un entier que tu préciseras, puis décompose $N - 1$ en facteurs premiers sans calculatrice.

Ex. 41 ★★★ **Carreler un mur** — Inès veut couvrir un mur rectangulaire de 360 cm de large et 252 cm de haut avec des carreaux carrés identiques, sans découpe ni espace. Le côté d'un carreau est un nombre entier de centimètres.

(a) Décompose 360 et 252 en facteurs premiers : divise successivement par 2, puis par 3, etc., en notant les quotients.

(b) Déduis-en le plus grand côté possible pour les carreaux. Justifie.

(c) Combien de carreaux de ce côté faut-il pour couvrir le mur ?

(d) Le vendeur propose des carreaux de 24 cm de côté. Conviennent-ils ? Justifie à l'aide des décompositions.

(e) Donne toutes les longueurs possibles du côté d'un carreau, en utilisant les facteurs premiers communs.

Ex. 42 ★★★ **Jusqu'où tester ?** — Pour savoir si un entier $n \geqslant 2$ est premier, Hugo teste tous les diviseurs possibles jusqu'à $\frac{n}{2}$. Ben lui conseille de s'arrêter dès que $d \times d > n$. On considère la fonction suivante, incomplète.

```
def plus_petit_diviseur(n):
    d = 2
    while ...:
        if n % d == 0:
            return d
        d = d + 1
    return n
```

(a) On suppose que $n = a \times b$ avec a et b entiers et $2 \leqslant a \leqslant b$. Montre que $a \times a \leqslant n$, puis explique pourquoi la méthode de Ben suffit.

(b) Applique la méthode de Ben à 409 : quels nombres premiers dois-tu tester ? Conclus.

(c) Décompose 391 en facteurs premiers, en testant les nombres premiers dans l'ordre.

(d) Complète la condition de la boucle `while` selon la méthode de Ben, puis donne ce que renvoient `plus_petit_diviseur(391)` et `plus_petit_diviseur(409)`.

(e) Explique pourquoi la fonction renvoie 2 pour tout entier pair $n \geqslant 4$, puis pourquoi un tel entier n'est pas premier.

7. *Fraction irréductible*

À retenir : Je décompose le numérateur et le dénominateur en facteurs premiers, puis je simplifie par tous les facteurs communs : $\frac{12}{18} = \frac{2^2 \times 3}{2 \times 3^2} = \frac{2}{3}$. On simplifie des facteurs, jamais les termes d'une somme. $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : simplifier par les facteurs premiers** — Décompose le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers, puis écris la fraction sous forme irréductible (ou sous forme d'un entier si c'est possible).

(a) $\frac{42}{70}$ (b) $\frac{108}{252}$ (c) $\frac{-56}{98}$

(d) $\frac{72}{-120}$ (e) $\frac{195}{65}$ (f) $\frac{77}{96}$

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : un résultat de calcul sous forme irréductible** — Calcule, puis donne le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

(a) $\frac{5}{6} + \frac{7}{10}$ (b) $\frac{14}{15} \times \frac{25}{28}$ (c) $\frac{7}{12} - \frac{13}{18}$

(d) $\frac{9}{16} \times \frac{8}{27}$ (e) $6 \times \frac{7}{15}$

Ex. 45 ★★☆ **Quatre élèves, quatre affirmations** — Pour chaque affirmation, dis si l'élève a raison et justifie. Si l'élève a tort, corrige son calcul.

(a) Inès écrit $\frac{60}{132} = \frac{30}{66}$ et affirme que $\frac{30}{66}$ est irréductible.

(b) Malo écrit $\frac{4+9}{4+15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

(c) Lucie écrit $\frac{26}{-39} = -\frac{2}{3}$.

(d) Yanis affirme : « $\frac{119}{153}$ est irréductible, car 119 et 153 sont tous les deux impairs. »

Ex. 46 ★★☆ **La chorale de Quimper** — La chorale de Quimper compte 378 membres. Parmi eux, 210 sont des femmes et les autres sont des hommes.

(a) Calcule le nombre d'hommes. Décompose ensuite 210, 378 et ce nombre en produits de facteurs premiers.

(b) Quelle fraction des membres sont des femmes ? Donne-la sous forme irréductible.

(c) Donne le rapport « nombre de femmes sur nombre d'hommes » sous la forme d'une fraction irréductible.

(d) Le jour du concert, 221 membres sont présents. Lina affirme : « $\frac{221}{378}$ se simplifie, car les deux nombres sont grands. » A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Pour un festival, la chorale chante avec celle de Brest, qui compte 252 membres dont 140 femmes. Quelle fraction des chanteurs réunis sont des femmes ? Donne-la sous forme irréductible.

Ex. 47 ★★★ **Deux entiers consécutifs** — Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul. On cherche quand les fractions $\frac{n}{n+1}$ et $\frac{n}{n+2}$ sont irréductibles.

(a) Décompose 224 et 225 en produits de facteurs premiers. La fraction $\frac{224}{225}$ est-elle irréductible ? Justifie.

(b) Soit d un entier positif qui divise n et $n+1$. Montre qu'il existe un entier q tel que $1 = d \times q$.

(c) Déduis-en que $d = 1$, puis que $\frac{n}{n+1}$ est irréductible pour tout entier $n \geqslant 1$.

(d) Sacha affirme : « pour tout entier $n \geqslant 1$, $\frac{n}{n+2}$ est irréductible ». Vrai ou faux ? Justifie.

(e) On suppose maintenant que n est impair. En t'inspirant de ce qui précède, montre que $\frac{n}{n+2}$ est irréductible.

Ex. 48 ★★★ **Contrôle : signes, produits et sommes** — On pose $A = \frac{-84}{126}$, $B = \frac{84}{-126}$ et $C = \frac{-1\,176}{-84}$.

(a) Décompose 84, 126 et 1 176 en produits de facteurs premiers.

(b) Écris A et B sous forme de fractions irréductibles. Que remarques-tu ?

(c) Écris C le plus simplement possible. Justifie.

(d) Calcule $A \times \frac{45}{-28}$ et donne le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

(e) Calcule $A + \frac{1}{C}$ et donne le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

Ex. 49 ★★★ **Le club d'escalade d'Annecy** — Le club d'escalade d'Annecy compte 924 membres, dont 385 juniors ; les autres sont des adultes. Pour simplifier une fraction $\frac{a}{b}$ (a et b entiers naturels non nuls), Ben a écrit la fonction ci-dessous.

```
def simplifie(a, b):
    d = 2
    while d <= a:
        if a % d == 0 and b % d == 0:
            a, b = a // d, b // d
        else:
            d = d + 1
    return a, b
```

(a) Décompose 385 et 924 en produits de facteurs premiers. Écris la proportion de juniors du club sous forme d'une fraction irréductible.

(b) Calcule le nombre d'adultes. Écris ensuite, sous forme irréductible, la proportion d'adultes et le rapport $\frac{\text{nombre de juniors}}{\text{nombre d'adultes}}$.

(c) Le club répartit tous ses membres en équipes identiques (même nombre de juniors et même nombre d'adultes dans chaque équipe). Combien d'équipes au plus ? Avec combien de juniors et d'adultes chacune ?

(d) Qu'affiche `print(simplifie(40, 112))` ? Donne les valeurs successives de `a` et `b`.

Ex. 49 **(suite)**

(e) Mia supprime la ligne `else: d = d + 1` est alors exécuté à chaque tour de boucle. Qu'afficherait `print(simplifie(50, 75))` ? Explique pourquoi le résultat est faux.