1. Rappels de 3e : multiples, diviseurs, critères de divisibilité, nombres premiers

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : multiples et diviseurs**

(a) $254 = 9 \times 28 + 2$: le reste vaut $2 \neq 0$, donc 254 n'est pas un multiple de 9.

(b) $168 = 12 \times 14$, et 14 est un entier.

(c) Non. Le critère de 4 porte sur les deux derniers chiffres : $16 = 4 \times 4$, donc 316 est divisible par 4 : $316 = 4 \times 79$.

(d) Non. Le critère de 3 porte sur la somme des chiffres : $2 + 5 + 0 + 6 = 13$ n'est pas un multiple de 3, donc 2 506 n'est pas divisible par 3 ($2\,506 = 3 \times 835 + 1$).

(e) $84 = 1 \times 84 = 2 \times 42 = 3 \times 28 = 4 \times 21 = 6 \times 14 = 7 \times 12$; 5, 8 et 9 ne divisent pas 84, et on s'arrête à 10 car $10 \times 10 = 100 > 84$. Les diviseurs sont : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84.

(f) $200 = 13 \times 15 + 5$, donc le plus grand multiple cherché est $13 \times 15 = 195$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : nombres premiers et décomposition**

(a) Non : 1 n'a qu'un seul diviseur positif, lui-même. Il lui en faudrait exactement deux.

(b) Non : 2 est premier (ses seuls diviseurs positifs sont 1 et 2) et il est pair. C'est le seul premier pair.

(c) $51 = 3 \times 17$ et $57 = 3 \times 19$: chacun est divisible par 3, donc a au moins trois diviseurs positifs. Aucun des deux n'est premier.

(d) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. 1 n'est pas premier ; les autres entiers jusqu'à 30 sont pairs (sauf 2) ou multiples de 3 ou de 5, comme $21 = 3 \times 7$ ou $25 = 5 \times 5$.

(e) $360 = 2 \times 180 = 2 \times 2 \times 90 = 2 \times 2 \times 2 \times 45 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$, donc $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

(f) 4 n'est pas premier : $4 = 2 \times 2$. La décomposition correcte est $60 = 2^2 \times 3 \times 5$.

Ex. 3 ★★☆ **Tableau de divisibilité et fausses implications**

(a) Critères : chiffre des unités pair (pour 2), somme des chiffres (pour 3 et 9), deux derniers chiffres (pour 4). Sommes des chiffres : 12, 9, 9, 15.

Nombre	2	3	4	9
714	oui	oui	non	non
1 026	oui	oui	non	oui
3 105	non	oui	non	oui
2 148	oui	oui	oui	non

(b) Non : $7 + 1 + 4 = 12$ est un multiple de 3 mais pas de 9. On a $714 = 9 \times 79 + 3$: 714 n'est pas divisible par 9. Divisible par 3 n'entraîne pas divisible par 9.

(c) Soit a un multiple de 9 : il existe un entier k tel que $a = 9k$. Alors $a = 3 \times (3k)$. Comme $K = 3k$ est un entier, $a = 3K$: a est un multiple de 3.

(d) Non : $2\,148 = 8 \times 268 + 4$, le reste vaut $4 \neq 0$. Être divisible par 2 et par 4 ne suffit pas pour être divisible par 8.

(e) $714 = 6 \times 119$, et 119 est un entier.

Ex. 4 ★★★ **Les bouquets de la fleuriste**

(a) $156 = 2 \times 78 = 2 \times 2 \times 39 = 2^2 \times 3 \times 13$ et $234 = 2 \times 117 = 2 \times 3 \times 39 = 2 \times 3^2 \times 13$.

(b) Le nombre de bouquets doit diviser 156 et 234. Les facteurs premiers communs sont 2, 3 et 13 ; on prend chacun avec le plus petit exposant : 2^1, 3^1 et 13^1. Le plus grand diviseur commun est $2 \times 3 \times 13 = 78$: elle peut composer au maximum 78 bouquets.

(c) $156 = 78 \times 2$ et $234 = 78 \times 3$: chaque bouquet contient 2 roses et 3 tulipes.

(d) $156 = 26 \times 6$ et $234 = 26 \times 9$: 26 bouquets sont possibles. En revanche, $156 = 36 \times 4 + 12$: 36 ne divise pas 156, donc 36 bouquets sont impossibles.

Ex. 5 ★★★ **Premier ou pas ? Enquête jusqu'à la racine**

(a) n est pair : il existe un entier k tel que $n = 2k$, donc 2 divise n. Ainsi 1, 2 et n sont trois diviseurs positifs de n, distincts car $n \geqslant 4$: n n'est pas premier. Restent 0 et 2 : 0 est un multiple de tout entier, donc il a une infinité de diviseurs ; 2 a exactement deux diviseurs positifs, 1 et 2. Le seul nombre premier pair est donc 2.

Ex. 5 **(suite)**

(b) Ses trois constats sont exacts ($1+1+9=11$ n'est pas un multiple de 3), mais $119 = 7 \times 17$, et 17 est un entier. 119 a donc au moins trois diviseurs positifs : 1, 7 et 119. Il n'est pas premier : il faut aussi tester 7, 11… tant que $p \times p \leqslant 119$.

(c) 437 est impair : il n'est pas divisible par 2. $4+3+7=14$ n'est pas un multiple de 3 : 437 n'est pas divisible par 3. Il ne se termine ni par 0 ni par 5 : il n'est pas divisible par 5. $437 = 7 \times 62 + 3$, $437 = 11 \times 39 + 8$, $437 = 13 \times 33 + 8$ et $437 = 17 \times 25 + 12$: les restes ne sont pas nuls. Si $437 = a \times b$ avec $1 < a \leqslant b$, alors $a \times a \leqslant 437$. On teste donc les premiers p tant que $p \times p \leqslant 437$. Or $19 \times 19 = 361 \leqslant 437$ et $23 \times 23 = 529 > 437$: il faut aller au plus jusqu'à 19. On trouve $437 = 19 \times 23$, et 23 est un entier.
Donc 437 n'est pas premier.

(d) 409 est impair : il n'est pas divisible par 2. $4+0+9=13$: il n'est pas divisible par 3. Il se termine par 9 : il n'est pas divisible par 5. $409 = 7 \times 58 + 3$, $409 = 11 \times 37 + 2$, $409 = 13 \times 31 + 6$, $409 = 17 \times 24 + 1$ et $409 = 19 \times 21 + 10$. Le premier suivant est 23, et $23 \times 23 = 529 > 409$: on s'arrête. En effet, si $409 = a \times b$ avec $1 < a \leqslant b$, alors $a \times a \leqslant 409$, et le plus petit diviseur $a > 1$ est premier : on l'aurait trouvé parmi 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Aucun ne divise 409, donc 409 est premier.

(e) Pour 1 et pour 2, la condition `2 * 2 <= n` est fausse : la boucle ne tourne pas. `est_premier(1)` renvoie donc `False` ($1 \geqslant 2$ est faux) et `est_premier(2)` renvoie `True`. Pour 437, `d` prend les valeurs 2 à 19 et `437 % 19 == 0` : la fonction renvoie `False`. Pour 409, aucun `d` de 2 à 20 ne divise 409, et la boucle s'arrête à `d = 21` ($21 \times 21 = 441 > 409$) : elle renvoie `True`. `n >= 2` écarte 0 et 1, qui ne sont pas premiers alors que la boucle ne leur trouve aucun diviseur.

Ex. 6 ★★★ **Le nombre aux deux chiffres cachés**

(a) Le critère de 4 porte sur le nombre formé par les deux derniers chiffres, ici $4b$, et pas sur le chiffre des unités seul. Pour $a = 0$ et $b = 2$: $N = 61\,042$, et $42 = 4 \times 10 + 2$ n'est pas un multiple de 4.
Donc N n'est pas divisible par 4 alors que b est pair : Noé a tort. Parmi $40, 41, \ldots, 49$, les multiples de 4 sont $40 = 4 \times 10$, $44 = 4 \times 11$ et $48 = 4 \times 12$.
Donc N est divisible par 4 si et seulement si $b \in \{0\,;4\,;8\}$.

Ex. 6 **(suite)**

(b) Non : le critère de 3 porte sur la somme de tous les chiffres, pas sur le chiffre des unités. Pour $a = 0$ et $b = 3$: $N = 61\,043$ et $6+1+0+4+3=14$, qui n'est pas un multiple de 3.
Donc 61 043 n'est pas divisible par 3 ($61\,043 = 3 \times 20\,347 + 2$), alors que $b = 3$ est un multiple de 3. Sacha a tort.

(c) Divisible par 4 : $b \in \{0\,;4\,;8\}$ d'après la première question. Divisible par 9 : la somme $6+1+a+4+b = 11+a+b$ doit être un multiple de 9. Comme $0 \leqslant a+b \leqslant 18$, cette somme est comprise entre 11 et 29 : elle vaut 18 ou 27, soit $a+b=7$ ou $a+b=16$. Si $b=0$: $a=7$. Si $b=4$: $a=3$ ($a=12$ est impossible). Si $b=8$: $a=8$ ($a=-1$ est impossible). Les valeurs de N sont donc 61 740, 61 344 et 61 848.

(d) $100 \times (610+a) + 40 + b = 61\,000 + 100a + 40 + b = 6 \times 10\,000 + 1 \times 1\,000 + a \times 100 + 4 \times 10 + b = N$.
Comme $100 = 4 \times 25$, on a $100 \times (610+a) = 4 \times 25 \times (610+a)$. Si $40+b$ est un multiple de 4, il existe un entier m tel que $40+b = 4m$. Alors $N = 4 \times (25 \times (610+a) + m)$, et $25 \times (610+a) + m$ est un entier : N est un multiple de 4. C'est pourquoi le critère de 4 porte sur les deux derniers chiffres.

(e) $N = 61\,740$. Il se termine par 40, multiple de 4 : $61\,740 = 4 \times 15\,435$. $1+5+4+3+5=18$: $15\,435 = 9 \times 1\,715$. 1 715 se termine par 5 : $1\,715 = 5 \times 343$, et $343 = 7 \times 49 = 7 \times 7 \times 7$.
Donc $61\,740 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^3$.

Ex. 7 ★★★ **Le carreleur de Grenoble**

(a) $378 = 2 \times 189 = 2 \times 3 \times 63 = 2 \times 3 \times 3 \times 21 = 2 \times 3^3 \times 7$ et $294 = 2 \times 147 = 2 \times 3 \times 49 = 2 \times 3 \times 7^2$.

(b) Le côté doit diviser 378 et 294 pour couvrir chaque dimension sans découpe. C'est donc un diviseur commun de 378 et de 294. Le plus grand s'obtient avec les facteurs premiers communs, chacun pris avec le plus petit exposant : $2 \times 3 \times 7 = 42$. Les dalles ont donc un côté de 42 cm.

(c) $378 = 42 \times 9$ et $294 = 42 \times 7$: il y a 9 dalles dans la longueur et 7 dans la largeur, soit $9 \times 7 = 63$ dalles.

Ex. 7 **(suite)**

(d) Paires de diviseurs de 42 : 1×42, 2×21, 3×14, 6×7 ; 4 et 5 ne divisent pas 42, et on s'arrête car $7 \times 7 = 49 > 42$. Diviseurs positifs : $1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42$. Un côté convenable divise 378 et 294. Ses facteurs premiers sont donc communs aux deux décompositions, avec des exposants au plus égaux à ceux de 42 : c'est un diviseur de 42. Le plus grand diviseur de 42 inférieur ou égal à 25 est 21. On a $378 = 21 \times 18$ et $294 = 21 \times 14$, soit $18 \times 14 = 252$ dalles de 21 cm.

(e) Non. Le côté passe de 42 cm à 21 cm, mais le nombre de dalles est multiplié par 2 dans la longueur (9 devient 18) et par 2 dans la largeur (7 devient 14). Au total, il est multiplié par $2 \times 2 = 4$: $252 = 4 \times 63$. Ben a tort : il faut 4 fois plus de dalles.

2. *Multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et multiples**

(a) $-9 \notin \mathbb{N}$ (c'est un entier négatif) et $-9 \in \mathbb{Z}$.

(b) $\frac{36}{4} = 9$, donc $\frac{36}{4} \in \mathbb{N}$. $\frac{-20}{5} = -4$, donc $\frac{-20}{5} \notin \mathbb{N}$ (mais $-4 \in \mathbb{Z}$).

(c) $-84 = 12 \times (-7)$, et $k = -7$ est un entier.

(d) Oui : $96 = (-8) \times (-12)$, et -12 est un entier. Donc -8 divise 96.

(e) Vrai : $0 = 23 \times 0$, et 0 est un entier. Donc 0 est un multiple de 23.

(f) Non : pour tout entier k, $0 \times k = 0 \neq 15$. Donc 15 n'est pas un multiple de 0, et 0 ne divise pas 15.

(g) « 117 est un multiple de 9 », car $117 = 9 \times 13$, et 13 est un entier. C'est 117 qui est le multiple, pas 9.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : oui ou non, avec la preuve**

(a) $247 = 13 \times 19$, et 19 est un entier. Donc 247 est un multiple de 13.

(b) $500 = 19 \times 26 + 6$ avec $0 \leqslant 6 < 19$. Le reste vaut 6, il n'est pas nul : 19 ne divise pas 500.

(c) $11 \times 26 = 286$ et $11 \times 27 = 297$, donc $286 < 290 < 297$. 290 est strictement entre deux multiples consécutifs de 11 : ce n'est pas un multiple de 11 (le reste vaut $290 - 286 = 4$).

Ex. 9 **(suite)**

(d) $400 = 27 \times 14 + 22$ avec $0 \leqslant 22 < 27$, donc le plus grand multiple vaut $400 - 22 = 378$. La réponse n'est ni 14 ni 15 : c'est le quotient (ou son arrondi), pas le multiple.

(e) $250 = 16 \times 15 + 10$, donc le plus grand multiple vaut $250 - 10 = 240$.

(f) Non : $344 = 8 \times 43$, et 43 est un entier. Le reste est nul, donc 344 est lui-même un multiple de 8 : c'est le plus grand multiple de 8 inférieur ou égal à 344. $336 = 8 \times 42$ n'est que le multiple précédent.

Ex. 10 ★★☆ **Listes de diviseurs à vérifier**

(a) $196 = 14 \times 14$ ne donne qu'un seul diviseur, 14 : Inès l'a compté deux fois. Elle a aussi oublié 196 lui-même, puisque $196 = 1 \times 196$.

(b) $14 \times 14 = 196$ n'est pas strictement supérieur à 196, donc on teste $d = 14$. $15 \times 15 = 225 > 196$, donc on s'arrête là : on teste d de 1 à 14.

(c) $196 = 1 \times 196 = 2 \times 98 = 4 \times 49 = 7 \times 28 = 14 \times 14$, et 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13 ne divisent pas 196. Les diviseurs positifs sont 1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98 et 196 : il y en a 9. Avec leurs opposés, 196 a 18 diviseurs dans $\mathbb{Z}$.

(d) Non. Hugo s'est arrêté trop tôt : $11 \times 11 = 121 \leqslant 143$, donc il devait tester $d = 11$ (on s'arrête seulement à 12, car $12 \times 12 = 144 > 143$). Or $143 = 11 \times 13$. Les diviseurs positifs de 143 sont donc 1, 11, 13 et 143 : 143 n'est pas premier.

Ex. 11 ★★☆ **Python : corriger des erreurs**

(a) Il faut écrire `a % b == 0`. Chez Mattéo, `=` est une affectation, pas un test. Chez Zoé, `a / b == 0` n'est vrai que si `a` vaut 0 : il faut tester le reste, pas le quotient.

(b) `m` prend les valeurs 0, 7, 14, 21, 28, puis 35 : comme $28 \leqslant 30$, la boucle ajoute encore 7. La fonction renvoie 35, qui est plus grand que 30 : le programme est faux.

(c) On écrit `while m + a <= b:` : on n'ajoute `a` que si le résultat ne dépasse pas `b`. La fonction renvoie alors 28.

(d) `m` passe à 7, 14, 21 puis 28 : cela fait 4 tours. Ensuite, $28 + 7 = 35 > 30$, donc la boucle s'arrête. Il y a donc 4 tours de boucle.

(e) Dès le départ, $0 + 9 = 9 > 5$: la boucle ne tourne pas et la fonction renvoie 0. Oui, $0 = 9 \times 0$ avec 0 entier, donc 0 est un multiple de 9. C'est le plus grand multiple de 9 inférieur ou égal à 5.

Ex. 12 ★★★ **Problème : les chaises du concert**

(a) $19 \times 19 = 361 \leqslant 384$ et $20 \times 20 = 400 > 384$: je teste d de 1 à 19. On trouve $384 = 1 \times 384 = 2 \times 192 = 3 \times 128 = 4 \times 96 = 6 \times 64 = 8 \times 48 = 12 \times 32 = 16 \times 24$. Les autres valeurs de d jusqu'à 19 ne divisent pas 384. Les diviseurs positifs de 384 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 128, 192 et 384. Il y en a 16.

(b) Le nombre de chaises par rangée est un diviseur de 384 compris entre 10 et 20 : c'est 12 ou 16. Avec 12 chaises, il y a $384 = 12 \times 32$, donc 32 rangées : c'est plus que 30, on refuse. Avec 16 chaises, il y a $384 = 16 \times 24$, donc 24 rangées : c'est accepté. La seule disposition possible est donc 24 rangées de 16 chaises.

(c) Non, Léon n'a pas raison : $23 \times 17 = 391 > 384$, donc 17 rangées complètes demanderaient 391 chaises. On a $23 \times 16 = 368 \leqslant 384 < 391$, donc $384 = 23 \times 16 + 16$ avec $0 \leqslant 16 < 23$. Le plus grand multiple de 23 inférieur ou égal à 384 est $384 - 16 = 368$. On peut faire 16 rangées complètes, et il reste 16 chaises.

(d) Le plus petit multiple de 23 supérieur ou égal à 384 est $23 \times 17 = 391$, car $368 < 384 < 391$. Il faut donc ajouter au minimum $391 - 384 = 7$ chaises, pour obtenir 17 rangées complètes.

Ex. 13 ★★★ **Python : les paires de diviseurs de 225**

(a) La fonction affiche cinq lignes : `1 225`, `3 75`, `5 45`, `9 25` et `15 15`. En effet, $225 = 1 \times 225 = 3 \times 75 = 5 \times 45 = 9 \times 25 = 15 \times 15$.

(b) d prend les valeurs $1, 2, \ldots, 15$, car $15 \times 15 = 225 \leqslant 225$. Pour $d = 16$, on a $16 \times 16 = 256 > 225$: la boucle s'arrête. La boucle fait donc 15 tours.

(c) Non, elle n'a pas raison. La paire 15×15 ne donne qu'un seul diviseur, car 225 est un carré. Les diviseurs positifs de 225 sont 1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75 et 225. Il y en a 9.

(d) Soit d un diviseur de 225 tel que $d \times d > 225$, donc $d > 15$. Alors $e = \frac{225}{d}$ est aussi un diviseur de 225, et $e < \frac{225}{15} = 15$. Ce diviseur e a donc déjà été testé dans la boucle, et la ligne affichée pour lui contient $\frac{225}{e} = d$. Ainsi, aucun diviseur n'est oublié.

Ex. 13 **(suite)**

(e) La boucle fait 225 tours (d va de 1 à 225). Les cinq lignes de départ sont toujours affichées. Ensuite, les quatre paires de deux diviseurs distincts réapparaissent dans l'autre sens : `25 9`, `45 5`, `75 3`, `225 1` (la paire `15 15` n'apparaît qu'une fois). On obtient donc 9 lignes, dont 4 sont des répétitions : le programme fait plus de travail pour rien.

Ex. 14 ★★★ **Dans $\mathbb{Z}$: signes, zéro et sens de la phrase**

(a) $260 = (-26) \times (-10)$, et -10 est un entier, donc -26 divise 260. Le quotient vaut $\frac{260}{-26} = -10$. On a $-10 \notin \mathbb{N}$ mais $-10 \in \mathbb{Z}$. Un diviseur peut être négatif, et le quotient aussi.

(b) Faux. $0 = 3 \times 0$, et 0 est un entier, donc 3 divise 0. Mais $260 = 3 \times 86 + 2$ avec $0 \leqslant 2 < 3$: le reste n'est pas nul, donc 3 ne divise pas 260. Ainsi, 3 est un diviseur positif de 0 mais pas de 260. En fait, tout entier d non nul divise 0, car $0 = d \times 0$.

(c) L'égalité $260 = 13 \times 20$ montre que 13 divise 260, c'est-à-dire que 260 est un multiple de 13. C'est le contraire de ce qu'écrit Nadia. Supposons que $13 = 260 \times k$ avec k entier. Si $k = 0$, on obtient $0 \neq 13$. Si $k \geqslant 1$, alors $260 \times k \geqslant 260 > 13$. Si $k \leqslant -1$, alors $260 \times k \leqslant -260 < 13$. Aucun entier k ne convient, donc 260 ne divise pas 13.

(d) On a $7 \times 37 = 259$ et $7 \times 38 = 266$, donc $259 < 260 < 266$. Ainsi, 260 est strictement compris entre deux multiples consécutifs de 7 : 7 ne divise pas 260 (le reste vaut $260 - 259 = 1$). Si -7 divisait 260, on aurait $260 = (-7) \times k = 7 \times (-k)$ avec $-k$ entier, et 7 diviserait 260 : c'est faux.
Donc -7 ne divise pas 260.

3. *Démontrer qu'un nombre est un multiple*

Ex. 15 ★☆☆ **Sommes, différences et critères**

(a) $221 + 104 = 13 \times 17 + 13 \times 8 = 13 \times (17 + 8) = 13 \times 25$, soit $325 = 13 \times 25$.
$221 - 104 = 13 \times (17 - 8) = 13 \times 9$, soit $117 = 13 \times 9$.
Comme 25 et 9 sont des entiers, 325 et 117 sont des multiples de 13.

(b) $221 \times 6 + 104 = 13 \times 17 \times 6 + 13 \times 8 = 13 \times (17 \times 6 + 8) = 13 \times 110$. Comme 110 est un entier, $221 \times 6 + 104 = 1\,430$ est un multiple de 13.

Ex. 15 **(suite)**

(c) Les deux derniers chiffres forment $52 = 4 \times 13$, donc $7\,452$ est divisible par $4 : 7\,452 = 4 \times 1\,863$. La somme des chiffres vaut $7 + 4 + 5 + 2 = 18$, un multiple de 9, donc $7\,452$ est divisible par $9 : 7\,452 = 9 \times 828$.

(d) $0 = 13 \times 0$ et $-104 = 13 \times (-8)$. Comme 0 et -8 sont des entiers, 0 et -104 sont des multiples de 13.

Ex. 16 ★☆☆ **Mettre n en facteur**

(a) $14n + 21 = 7 \times (2n + 3)$. Comme $K = 2n + 3$ est un entier, $14n + 21$ est un multiple de 7.

(b) $8n - 4(n - 5) = 8n - 4n + 20 = 4n + 20 = 4 \times (n + 5)$. Comme $K = n + 5$ est un entier, c'est un multiple de 4.

(c) $(n + 5)^2 - (n - 1)^2 = (n^2 + 10n + 25) - (n^2 - 2n + 1) = 12n + 24 = 12 \times (n + 2)$. Comme $K = n + 2$ est un entier, c'est un multiple de 12.

(d) $12n + 18 = 6 \times (2n + 3)$. Comme $K = 2n + 3$ est un entier, $12n + 18$ est un multiple de 6. Contre-exemple pour 12 : avec $n = 0$, $12n + 18 = 18 = 12 \times 1 + 6$, et 18 n'est pas un multiple de 12.

(e) $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3 \times (n + 1)$. Comme $K = n + 1$ est un entier, cette somme est un multiple de 3.

Ex. 17 ★★☆ **Démontrer ou réfuter**

(a) Faux. $15 = 3 \times 5$ et $6 = 3 \times 2$ sont des multiples de 3, mais $15 + 6 = 21 = 6 \times 3 + 3$ n'est pas un multiple de 6. Un seul contre-exemple suffit : l'affirmation est fausse.

(b) Faux. $(n + 2)^2 - n^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4n + 4 = 4 \times (n + 1)$. Avec $n = 0 : 4 = 8 \times 0 + 4$, qui n'est pas un multiple de 8. Un seul contre-exemple suffit : l'affirmation est fausse.

(c) Vrai. Soit $a = 4k$ et $b = 6k'$, avec k et k' entiers (deux lettres, car a et b sont indépendants). Alors $a + b = 4k + 6k' = 2 \times (2k + 3k')$. Comme $K = 2k + 3k'$ est un entier, $a + b$ est pair.

(d) Faux. On obtient bien 4, 12 et 36, mais trois exemples ne démontrent rien. Avec $n = 1$:
$2 \times 1^2 + 4 = 6 = 4 \times 1 + 2$, qui n'est pas un multiple de 4. Sami a tort.

Ex. 18 ★★☆ **Une preuve à corriger, un nombre « abba »**

(a) En écrivant $a = 9k$ et $b = 9k$ avec la même lettre, Inès suppose que $a = b$. Sa preuve ne vaut que pour deux nombres égaux, pas pour deux multiples de 9 quelconques.

(b) Soit a et b deux multiples de 9 : il existe deux entiers k et k' tels que $a = 9k$ et $b = 9k'$. Alors $a - b = 9k - 9k' = 9 \times (k - k')$. Comme $K = k - k'$ est un entier, $a - b$ est un multiple de 9.

(c) $1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11 \times 91a + 11 \times 10b = 11 \times (91a + 10b)$. Comme a et b sont des entiers, $K = 91a + 10b$ est un entier.
Donc « abba » est un multiple de 11.

(d) 3 553 s'écrit « abba » avec $a = 3$ et $b = 5$.
Donc $3\,553 = 11 \times (91 \times 3 + 10 \times 5) = 11 \times 323$. Ainsi, 3 553 est un multiple de 11 et le quotient vaut 323.

Ex. 19 ★★★ **Des entiers consécutifs**

(a) Non. Elle a vérifié la propriété sur trois exemples seulement, alors qu'il existe une infinité de suites de cinq entiers consécutifs. Des exemples, même nombreux, ne démontrent pas une propriété valable pour tout entier.

(b) Cinq entiers consécutifs s'écrivent n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ et $n + 4$. Leur somme vaut $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10 = 5(n + 2)$. Comme n est un entier, $K = n + 2$ est un entier.
Donc la somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5.

(c) Faux. Contre-exemple : $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, et $10 = 4 \times 2 + 2$ n'est pas un multiple de 4. Un seul contre-exemple suffit pour prouver que l'affirmation est fausse.

(d) $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6 = 4n + 4 + 2 = 4(n + 1) + 2$. Comme n est un entier, $K = n + 1$ est un entier, et $r = 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division par 4 vaut 2, il n'est pas nul : la somme de quatre entiers naturels consécutifs n'est jamais un multiple de 4. En revanche, $4n + 6 = 2(2n + 3)$ est toujours pair.

(e) Deux nombres impairs consécutifs s'écrivent $2n + 1$ et $2n + 3$. Leur somme vaut $(2n + 1) + (2n + 3) = 4n + 4 = 4(n + 1)$. Comme n est un entier, $K = n + 1$ est un entier.
Donc la somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4.

Ex. 20 ★★★ **Pourquoi le critère de divisibilité par 9 marche**

(a) $N-(a+b+c)=100a+10b+c-a-b-c=99a+9b=9(11a+b)$. Comme a et b sont des entiers, $K=11a+b$ est un entier.
Donc $N-(a+b+c)$ est un multiple de 9.

(b) Si $a+b+c$ est un multiple de 9, il existe un entier k tel que $a+b+c=9k$. Alors $N=9(11a+b)+(a+b+c)=9(11a+b)+9k=9(11a+b+k)$. Comme $K=11a+b+k$ est un entier, N est un multiple de 9.

(c) $N-(a+b+c)=9(11a+b)=3\times 3(11a+b)=3(33a+3b)$, et $K=33a+3b$ est un entier : c'est un multiple de 3. Comme à la question précédente, si $a+b+c=3k$ avec k entier, alors $N=3(33a+3b+k)$.
Critère : si la somme des chiffres de N est un multiple de 3, alors N est un multiple de 3.

(d) $M=100c+10b+a$.
Donc $N-M=100a+10b+c-(100c+10b+a)=100a+10b+c-100c-10b-a=99a-99c=99(a-c)$. Comme a et c sont des entiers, $K=a-c$ est un entier.
Donc $N-M$ est un multiple de 99.

(e) Faux. Contre-exemple : pour $N=352$, on a $M=253$ et $N+M=605=101\times 5+100$, qui n'est pas un multiple de 101. En effet, $N+M=101a+20b+101c$: le terme $20b$ empêche de mettre 101 en facteur.

Ex. 21 ★★★ **Comme en DS : multiple de 3, de 6, de 40 ?**

(a) $6n+15=3(2n+5)$. Comme n est un entier, $K=2n+5$ est un entier : $6n+15$ est un multiple de 3. Par ailleurs, $6n+15=6n+14+1=2(3n+7)+1$, avec $3n+7$ entier : $6n+15$ est impair. Or un multiple de 6 s'écrit $6m=2(3m)$ avec m entier : il est pair.
Donc $6n+15$ n'est jamais un multiple de 6.

(b) Le programme affiche −1 : pour aucun entier n de 0 à 999, $6n+15$ n'est un multiple de 6. Mais cela ne démontre rien pour tout entier : seules 1 000 valeurs ont été testées, et aucun entier négatif. La preuve valable pour tout entier est celle de la question précédente.

(c) Non. Contre-exemple : $60=10\times 6$ et $60=4\times 15$, donc 60 est un multiple de 10 et de 4. Mais $60=40\times 1+20$ n'est pas un multiple de 40.

Ex. 21 **(suite)**

(d) Soit a un multiple de 10 et b un multiple de 4 : il existe deux entiers k et k' tels que $a=10k$ et $b=4k'$ (deux lettres différentes, car a et b sont indépendants). Alors $a\times b=10k\times 4k'=40kk'$. Comme k et k' sont des entiers, $K=kk'$ est un entier.
Donc $a\times b$ est un multiple de 40.

4. Pairs et impairs : démonstrations

Ex. 22 ★☆☆ **Écrire sous la forme 2k ou 2k + 1**

(a) $0=2\times 0$ et 0 est un entier : 0 est pair.

(b) $-11=2\times(-6)+1$ et -6 est un entier : -11 est impair. Attention, ici K est négatif.

(c) $-34=2\times(-17)$ et -17 est un entier : -34 est pair.

(d) $135=2\times 67+1$ et 67 est un entier : 135 est impair.

(e) $4k+6=2(2k+3)$ et $2k+3$ est un entier : $4k+6$ est pair.

(f) $8k+5=8k+4+1=2(4k+2)+1$ et $4k+2$ est un entier : $8k+5$ est impair.

(g) $10k-3=10k-4+1=2(5k-2)+1$ et $5k-2$ est un entier : $10k-3$ est impair.

Ex. 23 ★☆☆ **Parité sans poser le calcul**

(a) 357 et 849 sont impairs, et impair + impair = pair : $357+849$ est pair
(il vaut 1 206).

(b) impair × impair = impair : 357×849 est impair
(il vaut 303 093).

(c) Non. 1 246 est pair, et pair × impair = pair : le produit est pair. Or 4 459 433 est impair. Le produit ne peut donc pas valoir ce nombre
(il vaut 4 459 434).

(d) Deux entiers consécutifs n'ont jamais la même parité : l'un est pair, donc le produit est pair (4 785 156). La somme pair + impair est impaire
(4 375).

(e) `n % 2` vaut 1 et le programme affiche `False` : le reste de la division par 2 est 1, donc 4 471 est impair.

(f) C'est faux : 5 est impair, mais $5=3\times 1+2$ n'est pas un multiple de 3. Il ne s'écrit donc pas $3k$ avec k entier. De plus, $3\times 2=6$ est pair. La bonne écriture d'un impair est $2k+1$.

(g) C'est faux : avec $k=1$, on obtient $k+1=2$, qui est pair. La forme $k+1$ ne dit rien sur la parité.

Ex. 24 ★★☆ **La démonstration d'Inès**

(a) Inès utilise la même lettre k pour a et pour b, donc elle impose $a = b$. Sa démonstration ne traite pas, par exemple, $a = 3$ et $b = 7$.

(b) Il existe deux entiers k et p tels que $a = 2k + 1$ et $b = 2p + 1$. Alors $a + b = 2k + 2p + 2 = 2(k + p + 1)$, et $k + p + 1$ est un entier.
Donc $a + b$ est pair.

(c) On pose $a = 2k + 1$ et $b = 2p + 1$ avec k et p entiers.
On factorise : $ab + a = a(b + 1)$. Or $b + 1 = 2p + 2 = 2(p + 1)$, donc $ab + a = 2 \times (2k + 1)(p + 1)$, et $(2k + 1)(p + 1)$ est un entier.
Donc $ab + a$ est pair.

(d) C'est faux. Contre-exemple : $1 + 3 + 5 = 9$, qui est impair. En effet, la somme des deux premiers est paire, et pair + impair = impair.

Ex. 25 ★★☆ **Pour tout entier n : deux cas**

(a) $n^2 + n = n(n + 1)$. Si n est pair, $n = 2k$ avec k entier, et $n(n + 1) = 2 \times k(2k + 1)$, où $k(2k + 1)$ est un entier. Si n est impair, $n = 2k + 1$, donc $n + 1 = 2(k + 1)$ et $n(n + 1) = 2 \times (2k + 1)(k + 1)$, où $(2k + 1)(k + 1)$ est un entier. Dans les deux cas, $n^2 + n$ est pair.

(b) $n^2 + 3n + 1 = (n^2 + n) + 2n + 1$. D'après la question précédente, $n^2 + n = 2K$ avec K entier, donc $n^2 + 3n + 1 = 2(K + n) + 1$, et $K + n$ est un entier.
Donc $n^2 + 3n + 1$ est impair pour tout entier n.

(c) Le programme affiche 0. La variable `c` compte les entiers n de 0 à 50 pour lesquels $n^2 + 3n + 1$ est pair. Comme ce nombre est toujours impair, il n'y en a aucun.

(d) C'est faux : $n + (n + 1) = 2n + 1$, et n est un entier, donc ce nombre est toujours impair. Par exemple, pour $n = 0$, on obtient 1, qui est impair.

Ex. 26 ★★★ **Impair au carré, moins un**

(a) $n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$.

(b) k et $k + 1$ sont deux entiers consécutifs, donc l'un des deux est pair. Leur produit est donc pair : il existe un entier m tel que $k(k + 1) = 2m$. Alors $n^2 - 1 = 4 \times 2m = 8m$, et m est un entier : $n^2 - 1$ est un multiple de 8.

Ex. 26 (suite)

(c) $-7 = 2 \times (-4) + 1$, donc $k = -4$ (un k négatif convient). $(-7)^2 - 1 = 49 - 1 = 48$ et $4k(k + 1) = 4 \times (-4) \times (-3) = 48$. On a bien $48 = 8 \times 6$, avec 6 entier : c'est un multiple de 8.

(d) Oui. On raisonne par contraposée : si n est pair, $n = 2k$ avec k entier, et $n^2 - 1 = 4k^2 - 1 = 2(2k^2 - 1) + 1$, où $2k^2 - 1$ est un entier : $n^2 - 1$ est impair. Or un multiple de 8 s'écrit $8q = 2 \times 4q$: il est pair.
Donc si n est pair, $n^2 - 1$ n'est pas un multiple de 8.
Ainsi, si $n^2 - 1$ est un multiple de 8, n est impair : Lucas a raison.

(e) $2\,025 = 2 \times 1\,012 + 1$ est impair. D'après la question 2, $2\,025^2 - 1 = 4 \times 1\,012 \times 1\,013$, et $1\,012 \times 1\,013$ est pair car $1\,012$ est pair.
Donc $2\,025^2 - 1$ est un multiple de 8 (c'est $8 \times 512\,578$).

Ex. 27 ★★★ **Une expression dont la parité dépend de n**

(a) Pour $n = 0$: $A = 7$; $n = 1$: $A = 10$; $n = 2$: $A = 15$; $n = -3$: $A = 9 - 6 + 7 = 10$. Parités : impair, pair, impair, pair. Conjecture : A est impair quand n est pair, et pair quand n est impair.

(b) Si $n = 2k$: $A = 4k^2 + 4k + 7 = 2(2k^2 + 2k + 3) + 1$, et $2k^2 + 2k + 3$ est un entier, donc A est impair. Si $n = 2k + 1$: $A = 4k^2 + 4k + 1 + 4k + 2 + 7 = 4k^2 + 8k + 10 = 2(2k^2 + 4k + 5)$, et $2k^2 + 4k + 5$ est un entier, donc A est pair. La conjecture est démontrée.

(c) Le programme compte les entiers n de 0 à 99 pour lesquels A est pair. D'après la question 2, ce sont exactement les n impairs : $1, 3, \ldots, 99$. Il y en a 50, donc `compte(100)` renvoie 50.

(d) Non. Si n est pair, A est impair (question 2). Or $2\,026 = 2 \times 1\,013$ est pair.
Donc $2\,026$ ne s'écrit pas $n^2 + 2n + 7$ avec n pair.

(e) Oui. On raisonne par contraposée : si n est pair, alors A est impair (question 2).
Donc si A est pair, n ne peut pas être pair : n est impair. Maël a raison.

Ex. 28 ★★★ **Somme des carrés de deux impairs**

(a) $2k - 1 = 2k - 2 + 1 = 2(k - 1) + 1$, et $k - 1$ est un entier.
Donc $2k - 1$ est de la forme $2K + 1$ avec K entier : c'est un nombre impair.

Ex. 28 **(suite)**

(b) $a^2 = 4k^2 + 4k + 1$ et $b^2 = 4p^2 + 4p + 1$.
Donc $a^2 + b^2 = 4k^2 + 4k + 4p^2 + 4p + 2 = 4(k^2 + k + p^2 + p) + 2$. On pose $M = k^2 + k + p^2 + p$: c'est un entier, car sommes et produits d'entiers sont des entiers.

(c) $a^2 + b^2 = 4M + 2 = 2(2M + 1)$, et $2M + 1$ est un entier : $a^2 + b^2$ est pair. De plus, $4M + 2$ est compris strictement entre les multiples consécutifs de 4 que sont $4M$ et $4(M + 1) = 4M + 4$. Ce n'est donc pas un multiple de 4.

(d) $7^2 + 9^2 = 49 + 81 = 130 = 4 \times 32 + 2$: c'est bien de la forme $4M + 2$. Par contre, $2\,024 = 4 \times 506$ est un multiple de 4. D'après la question 3, il ne peut donc pas être la somme des carrés de deux impairs.

(e) Oui. Si a et b sont impairs, $a^2 + b^2 = 4M + 2$ n'est pas un multiple de 4 (question 3). Si $a = 2k + 1$ est impair et $b = 2p$ est pair, alors $a^2 + b^2 = 2(2k^2 + 2k + 2p^2) + 1$ est impair, donc ce n'est pas un multiple de 4. Même chose si a est pair et b impair. Il ne reste que le cas où a et b sont tous les deux pairs : Lina a raison.

5. *Carré d'un pair, carré d'un impair*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : la parité d'un carré**

(a) $43 = 2 \times 21 + 1$ est impair. Le carré d'un impair est impair, donc 43^2 est impair
(en effet, $43^2 = 1\,849 = 2 \times 924 + 1$).

(b) $-34 = 2 \times (-17)$ est pair. Or $(2k)^2 = 4k^2$: le carré d'un pair est un multiple de 4. On a bien
$(-34)^2 = 1\,156 = 4 \times 289$, où 289 est un entier.

(c) Léna a oublié le double produit : $(2k + 1)^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1$.

(d) $2\,116 = 2 \times 1\,058$ est pair. Si n était impair, n^2 serait impair.
Donc n est pair
(en effet, $n = 46$ ou $n = -46$).

(e) $3\,025 = 2 \times 1\,512 + 1$ est impair. Si n était pair, $n^2 = 4k^2$ serait pair.
Donc n est impair
(en effet, $n = 55$ ou $n = -55$).

(f) Non. Le carré d'un pair $2k$ vaut $4k^2$: c'est un multiple de 4. Or $2\,018 = 4 \times 504 + 2$ n'est pas un multiple de 4. Donc 2 018 n'est pas le carré d'un entier pair.

Ex. 30 ★★☆ **Tableau de parité de n et de n²**

(a) $n^2 = 81$. On a $-9 = 2 \times (-5) + 1$: n est impair. Et $81 = 2 \times 40 + 1$: n^2 est impair.

(b) $n^2 = 0$. On a $0 = 2 \times 0$: 0 est pair, et $n^2 = 0$ est pair aussi.

(c) $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$. Le nombre $K = 2k^2$ est un entier : n est pair et n^2 est pair.

(d) $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Le nombre $K = 2k^2 + 2k$ est un entier : n est impair et n^2 est impair.

(e) Dans toutes les lignes, n et n^2 ont la même parité : le carré d'un pair est pair, et le carré d'un impair est impair.

Ex. 31 ★★☆ **Réciproque ou contraposée ?**

(a) Hugo a démontré « si n est pair, alors n^2 est pair ». C'est la réciproque de la propriété voulue, pas la propriété elle-même : il a inversé l'hypothèse et la conclusion.

(b) La contraposée est : « si n est impair, alors n^2 est impair ».

(c) Soit n impair : il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, et $2k^2 + 2k$ est un entier : n^2 est impair. La contraposée est vraie, donc la propriété l'est aussi : si n^2 est pair, alors n est pair.

(d) Faux. Contre-exemple : $n = 6$. On a $n^2 = 36 = 4 \times 9$, et 9 est un entier, donc n^2 est un multiple de 4. Mais $6 = 4 \times 1 + 2$ n'est pas un multiple de 4. Un seul contre-exemple suffit à réfuter l'affirmation.

Ex. 32 ★★☆ **Toujours pair, et même plus**

(a) $n^2 + n = n(n + 1)$. Si $n = 2k$:
$n(n + 1) = 2 \times k(2k + 1)$, et $k(2k + 1)$ est un entier. Si $n = 2k + 1$: $n + 1 = 2(k + 1)$, donc
$n(n + 1) = 2 \times (2k + 1)(k + 1)$, et $(2k + 1)(k + 1)$ est un entier. Dans les deux cas, $n^2 + n$ est pair.

(b) $n^2 - n = (n^2 + n) - 2 \times n$. C'est la différence de deux nombres pairs, donc $n^2 - n$ est pair pour tout entier n.

(c) $n^2 + 3n + 5 = (n^2 + n) + 2n + 4 + 1 = (n^2 + n) + 2(n + 2) + 1$. D'après la première question, $n^2 + n = 2m$ avec m entier.
Donc $n^2 + 3n + 5 = 2(m + n + 2) + 1$, et $m + n + 2$ est un entier : $n^2 + 3n + 5$ est impair pour tout entier n.

Ex. 32 **(suite)**

(d) $a^2 - b^2 = (4k^2 + 4k + 1) - (4p^2 + 4p + 1) = 4(k^2 + k) - 4(p^2 + p)$. D'après la première question, $k^2 + k = 2m$ et $p^2 + p = 2q$, avec m et q entiers.
Donc $a^2 - b^2 = 8m - 8q = 8(m - q)$, et $m - q$ est un entier : $a^2 - b^2$ est un multiple de 8.

Ex. 33 ★★★ **Le carré d'un impair, moins 1**

(a) Non. Les calculs sont justes, mais trois exemples ne prouvent rien pour tous les impairs : il y en a une infinité. Il faut une démonstration avec $n = 2k + 1$, où k est un entier quelconque.

(b) $n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$. Attention au double produit $2 \times 2k \times 1 = 4k$, qu'il ne faut pas oublier.

(c) Les entiers k et $k + 1$ sont consécutifs, donc l'un des deux est pair. Un produit dont l'un des facteurs est pair est pair.
Donc $k(k + 1)$ est pair.

(d) D'après la question précédente, il existe un entier m tel que $k(k + 1) = 2m$. Alors $n^2 - 1 = 4 \times 2m = 8m$, et m est un entier.
Donc $n^2 - 1$ est un multiple de 8.

(e) 2 027 est impair : $2\,027 = 2 \times 1\,013 + 1$, donc $k = 1\,013$. Alors $2\,027^2 - 1 = 4 \times 1\,013 \times 1\,014$. Or $1\,013 \times 1\,014 = 1\,027\,182 = 2 \times 513\,591$.
Donc $2\,027^2 - 1 = 8 \times 513\,591$, où 513 591 est un entier : c'est un multiple de 8.

Ex. 34 ★★★ **La somme de deux carrés impairs**

(a) En utilisant la même lettre k, Malik impose $a = b$. Sa démonstration ne traite donc que le cas de deux impairs égaux. Par exemple, elle ne couvre pas $a = 3$ et $b = 5$ (pour lesquels $3^2 + 5^2 = 34$). Il faut deux lettres : $a = 2k + 1$ et $b = 2p + 1$.

(b) $a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2p + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4p^2 + 4p + 1 = 4k^2 + 4k + 4p^2 + 4p + 2 = 4(k^2 + k + p^2 + p) + 2$.

(c) On pose $M = k^2 + k + p^2 + p$: c'est un entier. Alors $a^2 + b^2 = 4M + 2 = 2(2M + 1)$, avec $2M + 1$ entier : $a^2 + b^2$ est pair. Supposons que $a^2 + b^2 = 4N$ avec N entier. Alors $4N = 4M + 2$, donc $4(N - M) = 2$, puis $2(N - M) = 1$. Cela voudrait dire que 1 est pair, ce qui est impossible.
Donc $a^2 + b^2$ n'est pas un multiple de 4.

Ex. 34 **(suite)**

(d) Supposons que $a^2 + b^2 = c^2$. Alors c^2 est pair. Si c était impair, c^2 serait impair, ce qui est faux (c'est la contraposée).
Donc c est pair : $c = 2q$, et $c^2 = 4q^2$ est un multiple de 4. Cela contredit la question précédente. Conclusion : aucun entier c ne vérifie $a^2 + b^2 = c^2$.

Ex. 35 ★★★ **Un carré s'écrit 4K ou 4K + 1**

(a) $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$, et $K = k^2 + k$ est un entier.
Donc n^2 s'écrit $4K + 1$.

(b) $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$, et k^2 est un entier.
Donc n^2 est un multiple de 4
(et donc aussi de 2).

(c) Tout entier est pair ou impair. Si n est pair, $n^2 = 4K$ avec $K = k^2$ (question 2). Si n est impair, $n^2 = 4K + 1$ avec $K = k^2 + k$ (question 1). Dans les deux cas, n^2 s'écrit $4K$ ou $4K + 1$, avec K entier.

(d) $4\,078 = 4 \times 1\,019 + 2$: dans la division euclidienne de 4 078 par 4, le reste est 2. Or un carré a pour reste 0 ou 1 dans la division par 4 (question 3), et ce reste est unique.
Donc 4 078 n'est pas un carré.

(e) Non. Chaque carré s'écrit $4K$ ou $4K + 1$. Une somme de deux carrés s'écrit donc $4(K + K')$, $4(K + K') + 1$ ou $4(K + K') + 2$: son reste dans la division par 4 vaut 0, 1 ou 2. Or $2\,019 = 4 \times 504 + 3$ a pour reste 3.
Donc 2 019 n'est pas une somme de deux carrés.

6. *Nombres premiers et décomposition*

Ex. 36 ★☆☆ **Premier ou pas ?**

(a) Non : 1 n'a qu'un seul diviseur positif, lui-même. Un nombre premier en a exactement deux.

(b) $358 = 2 \times 179$: 358 est pair et supérieur à 2, il a au moins les diviseurs 1, 2 et 358, donc il n'est pas premier.

(c) On s'arrête dès que $p \times p > 127$: $11 \times 11 = 121 \leqslant 127$ mais $13 \times 13 = 169 > 127$. Il suffit de tester 2, 3, 5, 7 et 11. Aucun ne divise 127 (par exemple $127 = 7 \times 18 + 1$ et $127 = 11 \times 11 + 6$), donc 127 est premier.

(d) $143 = 11 \times 13$, donc 143 a d'autres diviseurs que 1 et 143 : il n'est pas premier.

Ex. 36 **(suite)**

(e) 2, 3, 5, 7 et 11 ne divisent pas 221 (par exemple $221 = 7 \times 31 + 4$ et $221 = 11 \times 20 + 1$), mais $221 = 13 \times 17$. Le plus petit diviseur premier de 221 est 13.

(f) Non : $17 \times 17 = 289 \leqslant 323$, il faut donc encore tester 17. Or $323 = 17 \times 19$: 323 n'est pas premier.

(g) On teste 2, 3, 5 et 7, car $11 \times 11 = 121 > 120$. On écarte les nombres pairs, 105 et 115 (multiples de 5), $111 = 3 \times 37$, $117 = 3 \times 39$ et $119 = 7 \times 17$. Restent 101, 103, 107, 109 et 113, qui sont premiers.

Ex. 37 ★☆☆ **Décompositions en facteurs premiers**

(a) $504 \div 2 = 252$, $252 \div 2 = 126$, $126 \div 2 = 63$, $63 \div 3 = 21$, $21 \div 3 = 7$ et 7 est premier.
Donc $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$.

(b) 1 265 se termine par 5 : $1\,265 = 5 \times 253$. 253 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 ($253 = 7 \times 36 + 1$), mais $253 = 11 \times 23$.
Donc $1\,265 = 5 \times 11 \times 23$, et 5, 11, 23 sont premiers.

(c) $2^4 \times 3 \times 5^2 = 16 \times 3 \times 25 = 1\,200$.

(d) 4 et 6 ne sont pas premiers et $25 = 5^2$ n'est pas écrit en puissance. Avec $4 = 2^2$ et $6 = 2 \times 3$: $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$.

(e) Aucun ne s'est trompé : $2^2 \times 3^2 \times 5 = 4 \times 9 \times 5 = 180$. Les deux produits ont les mêmes facteurs, seul l'ordre change. La décomposition est unique à l'ordre près.

(f) Non. Si $A = m^2$, élever au carré la décomposition de m double chaque exposant : tous les exposants de A seraient pairs (la décomposition est unique). Or l'exposant de 7 est 3, impair : A n'est pas le carré d'un entier.

Ex. 38 ★★☆ **Une fraction à rendre irréductible**

(a) $1\,176 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 = 2^3 \times 3 \times 7^2$ et $1\,260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$.

(b) Les facteurs communs sont 2^2, 3 et 7. Le plus grand diviseur commun est $2^2 \times 3 \times 7 = 84$.

(c) $\frac{1\,176}{1\,260} = \frac{84 \times 14}{84 \times 15} = \frac{14}{15}$. Comme $14 = 2 \times 7$ et $15 = 3 \times 5$ n'ont aucun facteur premier commun, $\frac{14}{15}$ est irréductible.

(d) On ne simplifie que des facteurs, jamais les termes d'une somme. On calcule d'abord : $\frac{14+21}{14+35} = \frac{35}{49} = \frac{7 \times 5}{7 \times 7} = \frac{5}{7}$, qui est irréductible. Le résultat de Clara, $\frac{3}{5}$, est faux.

Ex. 39 ★★☆ **Un test de primalité en Python**

(a) `premier(1)` : $d = 2$ et $2 \times 2 = 4 > 1$, donc on n'entre pas dans la boucle. La dernière ligne renvoie la valeur de `1 >= 2`, c'est-à-dire `False` : 1 n'est pas premier.
`premier(2)` : $2 \times 2 = 4 > 2$, donc on n'entre pas non plus dans la boucle. Comme `2 >= 2` est vrai, la fonction renvoie `True` : 2 est premier.

(b) `d` prend les valeurs 2, 3, …, 10 (aucune ne divise 187), puis 11 : $187 = 11 \times 17$, donc `187 % 11 == 0` et la fonction renvoie `False`.

(c) Aucun entier de 2 à 11 ne divise 131. Pour $d = 12$, on a $12 \times 12 = 144 > 131$: la boucle s'arrête et la fonction renvoie `True`. 131 est premier.

(d) $d = 2$: $2 \times 2 = 4 \leqslant 15$ et `15 % 2` vaut 1. Puis $d = 4$: $4 \times 4 = 16 > 15$, donc la boucle s'arrête. Comme `15 >= 2` est vrai, la fonction renvoie `True`. C'est faux, car $15 = 3 \times 5$: avec `d = d + 2`, on ne teste que 2, 4, 6…, jamais les diviseurs impairs comme 3.

(e) Version d'origine : $9 \times 9 = 81 \leqslant 97$ et $10 \times 10 = 100 > 97$, donc `d` prend les valeurs 2 à 9, soit 8 valeurs. Version d'Ilan : `97 // 2` vaut 48, donc `d` prend les valeurs 2 à 48, soit 47 valeurs. Les deux renvoient `True`, car 97 est premier. Mais la version d'origine est préférable : elle fait 39 tests de moins. En effet, si 97 avait un diviseur $d \geqslant 10$ (autre que 97), le quotient de 97 par d serait un diviseur inférieur à 10, donc déjà testé.

Ex. 40 ★★★ **Quand $n^2 - 1$ est-il premier ?**

(a) $(n-1)(n+1) = n^2 + n - n - 1 = n^2 - 1$.

(b) Pour $n = 2$: $2^2 - 1 = (2-1)(2+1) = 1 \times 3 = 3$, qui est premier. Pour $n = 14$: $14^2 - 1 = 13 \times 15 = 195$, mais $15 = 3 \times 5$ n'est pas premier, donc $195 = 3 \times 5 \times 13$. Pour $n = 20$: $20^2 - 1 = 19 \times 21 = 399$, et $21 = 3 \times 7$, donc $399 = 3 \times 7 \times 19$.

(c) Soit $n \geqslant 3$. On a $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$. Comme $n - 1 \geqslant 2$ et $n + 1 \geqslant 4$, l'entier $n - 1$ est un diviseur de $n^2 - 1$, différent de 1, et différent de $n^2 - 1$ car $n + 1 \neq 1$.
Donc $n^2 - 1$ a au moins trois diviseurs positifs : pour tout entier $n \geqslant 3$, $n^2 - 1$ n'est pas premier.

Ex. 40 (suite)

(d) Les exposants sont tous pairs :
$N = (2^2 \times 3 \times 5)^2 = 60^2 = 3\,600$.
Donc $N - 1 = 60^2 - 1 = (60-1)(60+1) = 59 \times 61$.
On vérifie que 59 est premier : il n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7, et $11 \times 11 = 121 > 59$, on s'arrête. De même pour 61. Conclusion : $3\,599 = 59 \times 61$ est la décomposition en facteurs premiers.

Ex. 41 ★★★ Carreler un mur

(a) $360 \to 180 \to 90 \to 45$ (divisions par 2), $45 \to 15 \to 5$ (divisions par 3), $5 \to 1$.
Donc $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. De même $252 \to 126 \to 63 \to 21 \to 7 \to 1$, donc $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$.

(b) Le côté doit diviser 360 et 252. Les facteurs premiers communs sont 2^2 et 3^2 (5 et 7 ne sont pas communs). Le plus grand diviseur commun est donc $2^2 \times 3^2 = 36$: le plus grand côté possible est 36 cm.

(c) $360 = 36 \times 10$ et $252 = 36 \times 7$: on pose 10 carreaux par rangée sur 7 rangées, soit $10 \times 7 = 70$ carreaux.

(d) $24 = 2^3 \times 3$. Or $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ ne contient le facteur 2 que deux fois, donc 24 ne divise pas 252 :
$252 = 24 \times 10 + 12$. Les carreaux de 24 cm ne conviennent pas.

(e) Les diviseurs communs s'écrivent $2^a \times 3^b$ avec a et b égaux à 0, 1 ou 2. On obtient 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36 : il y a 9 longueurs possibles (en cm).

Ex. 42 ★★★ Jusqu'où tester ?

(a) Comme $a \leqslant b$ et $a > 0$, on a $a \times a \leqslant a \times b = n$.
Donc si n n'est pas premier, il a un diviseur $a \geqslant 2$ tel que $a \times a \leqslant n$. Si aucun d tel que $d \times d \leqslant n$ ne divise n, alors n est premier : inutile d'aller jusqu'à $\frac{n}{2}$.

(b) $19 \times 19 = 361 \leqslant 409$ et $23 \times 23 = 529 > 409$: on teste 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. 409 est impair, la somme de ses chiffres 13 n'est pas un multiple de 3, il ne finit ni par 0 ni par 5 ; $409 = 7 \times 58 + 3$, $409 = 11 \times 37 + 2$, $409 = 13 \times 31 + 6$, $409 = 17 \times 24 + 1$, $409 = 19 \times 21 + 10$. Aucun ne divise 409 : 409 est premier.

(c) 391 est impair, $3 + 9 + 1 = 13$, il ne finit ni par 0 ni par 5 ; $391 = 7 \times 55 + 6$, $391 = 11 \times 35 + 6$, $391 = 13 \times 30 + 1$, mais $391 = 17 \times 23$. Comme 17 et 23 sont premiers, $391 = 17 \times 23$: il semblait premier, il ne l'est pas.

Ex. 42 (suite)

(d) La condition est `d * d <= n`.
`plus_petit_diviseur(391)` renvoie 17. Pour `plus_petit_diviseur(409)`, $20 \times 20 = 400 \leqslant 409$ mais $21 \times 21 = 441 > 409$: la boucle s'arrête à $d = 21$ sans avoir trouvé de diviseur, et la fonction renvoie 409.

(e) Si n est pair et $n \geqslant 4$, au premier passage $d = 2$ et $2 \times 2 = 4 \leqslant n$: on entre dans la boucle, et `n % 2` vaut 0, donc la fonction renvoie 2. Alors 1, 2 et n sont trois diviseurs positifs distincts de n (car $n \neq 2$) : un entier pair supérieur à 2 n'est jamais premier.

7. *Fraction irréductible*

Ex. 43 ★☆☆ Automatismes : simplifier par les facteurs premiers

(a) $42 = 2 \times 3 \times 7$ et $70 = 2 \times 5 \times 7$. Les facteurs communs sont 2 et 7, donc $\frac{42}{70} = \frac{2\times3\times7}{2\times5\times7} = \frac{3}{5}$. Cette fraction est irréductible, car 3 et 5 sont deux nombres premiers différents.

(b) $108 = 2^2 \times 3^3$ et $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$. Les facteurs communs donnent $2^2 \times 3^2 = 36$.
Donc $\frac{108}{252} = \frac{3\times36}{7\times36} = \frac{3}{7}$. Cette fraction est irréductible, car 3 et 7 sont deux nombres premiers différents.

(c) $56 = 2^3 \times 7$ et $98 = 2 \times 7^2$. Les facteurs communs donnent $2 \times 7 = 14$.
Donc $\frac{-56}{98} = -\frac{2^2\times14}{7\times14} = -\frac{4}{7}$. Cette fraction est irréductible, car $4 = 2^2$ et 7 n'ont aucun facteur premier commun.

(d) $72 = 2^3 \times 3^2$ et $120 = 2^3 \times 3 \times 5$. Les facteurs communs donnent $2^3 \times 3 = 24$.
Donc $\frac{72}{-120} = -\frac{3\times24}{5\times24} = -\frac{3}{5}$. Le signe moins s'écrit devant la fraction.

(e) $195 = 3 \times 5 \times 13$ et $65 = 5 \times 13$.
Donc $\frac{195}{65} = \frac{3\times5\times13}{5\times13} = \frac{3}{1} = 3$. Le dénominateur se simplifie en 1 : la fraction est égale à l'entier 3.

(f) $77 = 7 \times 11$ et $96 = 2^5 \times 3$. Ces deux nombres n'ont aucun facteur premier commun, donc $\frac{77}{96}$ est déjà irréductible.

Ex. 44 ★☆☆ Automatismes : un résultat de calcul sous forme irréductible

(a) $\frac{5}{6} + \frac{7}{10} = \frac{25}{30} + \frac{21}{30} = \frac{46}{30} = \frac{2\times23}{2\times3\times5} = \frac{23}{15}$. Cette fraction est irréductible, car 23 est premier et ne divise pas 15.

(b) Je décompose avant de multiplier : $\frac{14}{15} \times \frac{25}{28} = \frac{2\times7\times5\times5}{3\times5\times2\times2\times7} = \frac{5}{3\times2} = \frac{5}{6}$. Cette fraction est irréductible.

Ex. 44 **(suite)**

(c) $\frac{7}{12} - \frac{13}{18} = \frac{21}{36} - \frac{26}{36} = -\frac{5}{36}$. Cette fraction est irréductible, car $36 = 2^2 \times 3^2$ n'a pas le facteur 5.

(d) $\frac{9}{16} \times \frac{8}{27} = \frac{3^2 \times 2^3}{2^4 \times 3^3} = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$. Cette fraction est irréductible.

(e) $6 \times \frac{7}{15} = \frac{2 \times 3 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{5}$. Cette fraction est irréductible, car $14 = 2 \times 7$ et 5 n'ont aucun facteur premier commun.

Ex. 45 ★★☆ **Quatre élèves, quatre affirmations**

(a) Inès a tort : son égalité est juste, mais $30 = 2 \times 3 \times 5$ et $66 = 2 \times 3 \times 11$ ont encore les facteurs communs 2 et 3. En effet, $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ et $132 = 2^2 \times 3 \times 11$, donc $\frac{60}{132} = \frac{5}{11}$. Cette fraction est irréductible.

(b) Malo a tort : il a « barré » les 4, qui sont des termes d'une somme et pas des facteurs. Il faut d'abord calculer : $\frac{4+9}{4+15} = \frac{13}{19}$. Cette fraction est irréductible, car 13 et 19 sont deux nombres premiers différents.

(c) Lucie a raison : $26 = 2 \times 13$ et $39 = 3 \times 13$, donc $\frac{26}{-39} = -\frac{2 \times 13}{3 \times 13} = -\frac{2}{3}$. Le signe moins s'écrit devant la fraction, et $\frac{2}{3}$ est irréductible, car 2 et 3 sont deux nombres premiers différents.

(d) Yanis a tort : deux nombres impairs n'ont pas le facteur 2 en commun, mais ils peuvent avoir un autre facteur premier commun. Je décompose : $119 = 7 \times 17$ et $153 = 3^2 \times 17$. Le facteur 17 est commun, donc la fraction n'est pas irréductible et $\frac{119}{153} = \frac{7}{9}$.

Ex. 46 ★★☆ **La chorale de Quimper**

(a) Il y a $378 - 210 = 168$ hommes. $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$, $378 = 2 \times 3^3 \times 7$ et $168 = 2^3 \times 3 \times 7$.

(b) $\frac{210}{378} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 3^3 \times 7} = \frac{5}{3^2} = \frac{5}{9}$. Les $\frac{5}{9}$ des membres sont des femmes, et cette fraction est irréductible, car $9 = 3^2$ n'a pas le facteur 5.

(c) $\frac{210}{168} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{2^3 \times 3 \times 7} = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}$. Il y a 5 femmes pour 4 hommes.

(d) Lina a tort : $221 = 13 \times 17$ et $378 = 2 \times 3^3 \times 7$ n'ont aucun facteur premier commun.
Donc $\frac{221}{378}$ est déjà irréductible, même si les nombres sont grands.

(e) Les deux chorales réunies comptent $378 + 252 = 630$ chanteurs, dont $210 + 140 = 350$ femmes. $350 = 2 \times 5^2 \times 7$ et $630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$. Les facteurs communs donnent $2 \times 5 \times 7 = 70$, donc $\frac{350}{630} = \frac{5 \times 70}{9 \times 70} = \frac{5}{9}$. Les femmes forment les $\frac{5}{9}$ des chanteurs réunis. Cette fraction est irréductible, car $9 = 3^2$ n'a pas le facteur 5.

Ex. 47 ★★★ **Deux entiers consécutifs**

(a) $224 = 2^5 \times 7$ et $225 = 3^2 \times 5^2$. Les deux décompositions n'ont aucun facteur premier commun, donc 224 et 225 n'ont aucun diviseur positif commun autre que 1 : $\frac{224}{225}$ est irréductible.

(b) Comme d divise n et $n+1$, il existe des entiers k et m tels que $n = d \times k$ et $n + 1 = d \times m$. Alors $1 = (n+1) - n = d \times m - d \times k = d \times (m - k)$. Comme $q = m - k$ est un entier, on a bien $1 = d \times q$.

(c) On a $d \times q = 1$ avec d positif, donc q est un entier positif et $q \geqslant 1$. Alors $d \leqslant d \times q = 1$, et comme $d \geqslant 1$, on obtient $d = 1$. Le seul diviseur positif commun à n et $n+1$ est 1, donc $\frac{n}{n+1}$ est irréductible pour tout entier $n \geqslant 1$.

(d) C'est faux. Contre-exemple : pour $n = 2$, on obtient $\frac{2}{4} = \frac{2 \times 1}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$. Comme 2 divise 2 et 4, la fraction $\frac{2}{4}$ n'est pas irréductible.

(e) Soit d un entier positif qui divise n et $n+2$. Il existe des entiers k et m tels que $n = d \times k$ et $n + 2 = d \times m$, donc $2 = (n+2) - n = d \times (m - k)$, où $m - k$ est un entier positif. Ainsi $d \leqslant 2$, donc $d = 1$ ou $d = 2$. Si l'on avait $d = 2$, alors $n = 2 \times k$ serait pair, ce qui est impossible puisque n est impair.
Donc $d = 1$: $\frac{n}{n+2}$ est irréductible quand n est impair.

Ex. 48 ★★★ **Contrôle : signes, produits et sommes**

(a) $84 = 2^2 \times 3 \times 7$, $126 = 2 \times 3^2 \times 7$ et $1\,176 = 2^3 \times 3 \times 7^2$.

(b) Les facteurs communs à 84 et 126 sont $2 \times 3 \times 7 = 42$. Donc $A = -\frac{2 \times 42}{3 \times 42} = -\frac{2}{3}$ et $B = -\frac{2 \times 42}{3 \times 42} = -\frac{2}{3}$. Comme 2 et 3 sont deux nombres premiers différents, $\frac{2}{3}$ est irréductible. On remarque que $A = B = -\frac{2}{3}$: le signe « $-$ » se place devant la fraction.

(c) Le numérateur et le dénominateur sont tous deux négatifs, donc C est positif. $C = \frac{1\,176}{84} = \frac{2^3 \times 3 \times 7^2}{2^2 \times 3 \times 7} = 2 \times 7 = 14$. Le dénominateur se simplifie en 1 : C est l'entier 14.

(d) $A \times \frac{45}{-28} = \frac{-2}{3} \times \frac{45}{-28} = \frac{2 \times 45}{3 \times 28} = \frac{2 \times 3^2 \times 5}{3 \times 2^2 \times 7} = \frac{3 \times 5}{2 \times 7} = \frac{15}{14}$.
Comme $15 = 3 \times 5$ et $14 = 2 \times 7$ n'ont aucun facteur premier commun, $\frac{15}{14}$ est irréductible.

(e) $A + \frac{1}{C} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{14} = -\frac{28}{42} + \frac{3}{42} = -\frac{25}{42}$. Comme $25 = 5^2$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$ n'ont aucun facteur premier commun, $-\frac{25}{42}$ est irréductible.

Ex. 49 ★★★ **Le club d'escalade d'Annecy**

(a) $385 = 5 \times 7 \times 11$ et $924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$. Les facteurs communs sont $7 \times 11 = 77$.
Donc $\frac{385}{924} = \frac{5 \times 77}{12 \times 77} = \frac{5}{12}$. Comme 5 et $12 = 2^2 \times 3$ n'ont aucun facteur premier commun, la proportion de juniors est $\frac{5}{12}$, sous forme irréductible.

(b) Il y a $924 - 385 = 539$ adultes, et $539 = 7^2 \times 11 = 7 \times 77$. La proportion d'adultes est $\frac{539}{924} = \frac{7 \times 77}{12 \times 77} = \frac{7}{12}$. Le rapport vaut $\frac{385}{539} = \frac{5 \times 77}{7 \times 77} = \frac{5}{7}$. Les fractions $\frac{7}{12}$ et $\frac{5}{7}$ sont irréductibles, car leurs numérateurs et dénominateurs n'ont aucun facteur premier commun.

(c) Le nombre d'équipes doit diviser 385 et 539. Or $385 = 5 \times 7 \times 11$ et $539 = 7^2 \times 11$: le plus grand diviseur commun est $7 \times 11 = 77$. On peut former au plus 77 équipes, chacune avec $385 \div 77 = 5$ juniors et $539 \div 77 = 7$ adultes. On retrouve le rapport $\frac{5}{7}$.

(d) Avec $d = 2$, on divise trois fois : $(a\,;b)$ devient $(20\,;56)$, puis $(10\,;28)$, puis $(5\,;14)$. 5 est impair, donc d passe à 3, puis à 4, puis à 5 ; 5 divise 5 mais pas 14, donc d passe à $6 > 5$ et la boucle s'arrête. Le programme affiche `(5, 14)` ; on a bien $\frac{40}{112} = \frac{2^3 \times 5}{2^4 \times 7} = \frac{5}{14}$.

(e) $d = 2$, 3 et 4 ne divisent pas 50 et 75 à la fois. Avec $d = 5$, on obtient $(10\,;15)$, puis d passe à 6. Aucun d de 6 à 10 ne divise à la fois 10 et 15, et la boucle s'arrête à $d = 11$. Le programme affiche `(10, 15)`. Or 10 et 15 sont encore divisibles par 5 : la simplification est incomplète. Comme $50 = 2 \times 5^2$ et $75 = 3 \times 5^2$, il fallait diviser deux fois par 5, d'où $\frac{50}{75} = \frac{2}{3}$. Le programme de Ben, lui, affiche `(2, 3)`.