Corrigé – Arbres pondérés

Mathématiques – Seconde

Probabilités conditionnelles · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Lire un arbre ★

1. $P(A) = 0{,}3$ (premier niveau) ; $P_A(B) = 0{,}6$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}8$ (second niveau : probabilités « sachant »).

2. Un chemin se calcule par un produit.
   Chemin $A \to B$: $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$.
   Chemin $\overline{A} \to B$: $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14$.

3. Deux chemins mènent à B : $A \to B$ et $\overline{A} \to B$; on additionne leurs probabilités (question 2).
   $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}18 + 0{,}14 = 0{,}32$.

Exercice 2 – Compléter un arbre ★

1. Les branches issues d'un même nœud ont pour somme 1.
   Départ : $P(\overline{R}) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$.
   Nœud R : $P_R(\overline{S}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.
   Nœud $\overline{R}$: $P_{\overline{R}}(S) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

2. Chemin $R \to \overline{S}$: $P(R \cap \overline{S}) = P(R) \times P_R(\overline{S}) = 0{,}45 \times 0{,}8 = 0{,}36$.
   Chemin $\overline{R} \to S$: $P(\overline{R} \cap S) = P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(S) = 0{,}55 \times 0{,}3 = 0{,}165$.

Exercice 3 – Traduire une phrase ★

Dans un lycée, on choisit un élève au hasard. I : « il est interne », B : « il vient en bus », S : « il fait du sport en club ». Écris chaque phrase avec une probabilité : $P(\dots)$, $P_{\dots}(\dots)$ ou $P(\cdots \cap \dots)$.

a) Pas de « parmi » : proportion de tous les élèves.
$P(I) = 0{,}3$.

b) « Parmi les internes » est la condition : I va en indice.
$P_I(S) = 0{,}8$.

c) « Externes et en bus » : les deux à la fois, parmi tous les élèves.
$P(\overline{I} \cap B) = 0{,}12$.

d) « Parmi les externes » : la condition est $\overline{I}$, en indice.
Un quart $= 0{,}25$: $P_{\overline{I}}(S) = 0{,}25$.

e) « Parmi les sportifs en club » : la condition est S.
$P_S(I) = 0{,}6$.

f) « Un élève qui vient en bus » : on se place parmi les élèves qui viennent en bus, la condition est B.
$P_B(S) = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$.

Exercice 4 – La cantine ★★

1. Premier niveau : $P(S) = 0{,}4$ et $P(\overline{S}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.
   Après S (« 70 % des élèves de seconde ») : $P_S(C) = 0{,}7$ et $P_S(\overline{C}) = 0{,}3$.
   Après $\overline{S}$ (« 55 % des autres ») : $P_{\overline{S}}(C) = 0{,}55$ et $P_{\overline{S}}(\overline{C}) = 0{,}45$.

2. Chemin $S \to C$: $P(S \cap C) = P(S) \times P_S(C) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$.

3. Deux chemins mènent à C : $S \to C$ et $\overline{S} \to C$.
   $P(C) = P(S \cap C) + P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(C)$
   $P(C) = 0{,}28 + 0{,}6 \times 0{,}55 = 0{,}28 + 0{,}33 = 0{,}61$.

4. On sait que l'élève déjeune à la cantine : la condition est C.
   Ce n'est pas une branche de l'arbre, on utilise la formule.
   $P_C(S) = \dfrac{P(S \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}28}{0{,}61} = \dfrac{28}{61} \approx 0{,}46$.
   Sur 100 élèves, 61 déjeunent à la cantine, dont 28 élèves de seconde.

Exercice 5 – Le contrôle qualité ★★

	Défectueuse	**Conforme**	**Total**
Machine A	30	570	600
Machine B	8	392	400
Total	38	962	1 000

1. Machine A : $1\,000 \times 0{,}6 = 600$ pièces.
   Les 5 % portent sur ces 600 pièces : $600 \times 0{,}05 = 30$ défectueuses, $600 - 30 = 570$ conformes.
   Machine B : $1\,000 - 600 = 400$ pièces, dont $400 \times 0{,}02 = 8$ défectueuses et $400 - 8 = 392$ conformes.
   Totaux : $30 + 8 = 38$ défectueuses, $570 + 392 = 962$ conformes.

2. Total de la colonne « Défectueuse » (38) sur le total général.
   $P(D) = \dfrac{38}{1\,000} = 0{,}038$.

3. Condition D : on se place parmi les 38 pièces défectueuses ; 30 viennent de A.
   $P_D(A) = \dfrac{\text{Card}(D \cap A)}{\text{Card}(D)} = \dfrac{30}{38} = \dfrac{15}{19} \approx 0{,}79$.

4. Condition $\overline{D}$: parmi les 962 pièces conformes, 392 viennent de B.
   $P_{\overline{D}}(\overline{A}) = \dfrac{392}{962} = \dfrac{196}{481} \approx 0{,}41$.

Exercice 6 – Deux tirages sans remise ★★

1. Premier tirage, 8 boules : $P(R_1) = \dfrac{5}{8}$ et $P(\overline{R_1}) = \dfrac{3}{8}$.
   Après une rouge, il reste 4 rouges et 3 vertes, soit 7 boules : $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{4}{7}$ et $P_{R_1}(\overline{R_2}) = \dfrac{3}{7}$.
   Après une verte, il reste 5 rouges et 2 vertes : $P_{\overline{R_1}}(R_2) = \dfrac{5}{7}$ et $P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) = \dfrac{2}{7}$.

2. Chemin $R_1 \to R_2$: $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2)$.
   $P(R_1 \cap R_2) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{20}{56} = \dfrac{5}{14}$.

3. Deux chemins : $R_1 \to R_2$ (deux rouges) et $\overline{R_1} \to \overline{R_2}$ (deux vertes).
   Deux vertes : $\dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{6}{56}$.
   $P = \dfrac{20}{56} + \dfrac{6}{56} = \dfrac{26}{56} = \dfrac{13}{28}$.

4. Deux chemins mènent à R_2 : $R_1 \to R_2$ et $\overline{R_1} \to R_2$.
   $P(R_2) = \dfrac{20}{56} + \dfrac{3}{8} \times \dfrac{5}{7} = \dfrac{20}{56} + \dfrac{15}{56} = \dfrac{35}{56} = \dfrac{5}{8}$.
   C'est la même probabilité qu'au premier tirage.
   Tant qu'on ne connaît pas la première boule, la deuxième a autant de chances d'être rouge.

Exercice 7 – Les deux feux ★★

1. Arbre : $P(V_1) = 0{,}6$, $P_{V_1}(V_2) = 0{,}8$ (8 fois sur 10), $P_{\overline{V_1}}(V_2) = 0{,}25$ (1 fois sur 4).
   Chemin $V_1 \to V_2$: $P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) = 0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}48$.

2. « Au moins un feu rouge » est le contraire de « deux feux verts ».
   $P = 1 - P(V_1 \cap V_2) = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$.

3. Deux chemins mènent à V_2 : $V_1 \to V_2$ et $\overline{V_1} \to V_2$, avec $P(\overline{V_1}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.
   $P(V_2) = P(V_1 \cap V_2) + P(\overline{V_1}) \times P_{\overline{V_1}}(V_2)$
   $P(V_2) = 0{,}48 + 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}48 + 0{,}1 = 0{,}58$.

4. On sait que le second feu est vert : la condition est V_2.
   $P_{V_2}(V_1) = \dfrac{P(V_1 \cap V_2)}{P(V_2)} = \dfrac{0{,}48}{0{,}58} = \dfrac{24}{29} \approx 0{,}83$.

Exercice 8 – Le test de dépistage ★★★

1. Malades : $10\,000 \times 0{,}02 = 200$.
   Parmi eux, $200 \times 0{,}95 = 190$ positifs et $200 - 190 = 10$ négatifs.
   Sains : $10\,000 - 200 = 9\,800$.
   Parmi eux, $9\,800 \times 0{,}9 = 8\,820$ négatifs et $9\,800 - 8\,820 = 980$ positifs (faux positifs).
   Total des positifs : $190 + 980 = 1\,170$.

2. Condition T : on se place parmi les $1\,170$ tests positifs ; 190 sont malades.
   $P_T(M) = \dfrac{\text{Card}(T \cap M)}{\text{Card}(T)} = \dfrac{190}{1\,170} = \dfrac{19}{117} \approx 0{,}16$.
   Un test positif n'annonce la maladie qu'une fois sur six environ : la maladie est rare, et les faux positifs (980) sont bien plus nombreux que les vrais (190).

3. Condition $\overline{T}$: tests négatifs, $10 + 8\,820 = 8\,830$; 10 sont malades.
   $P_{\overline{T}}(M) = \dfrac{10}{8\,830} \approx 0{,}001$.
   Un test négatif est très rassurant.

4. Malades : $10\,000 \times 0{,}2 = 2\,000$, dont $2\,000 \times 0{,}95 = 1\,900$ positifs.
   Sains : $10\,000 - 2\,000 = 8\,000$, dont $8\,000 \times 0{,}1 = 800$ positifs.
   Positifs : $1\,900 + 800 = 2\,700$.
   $P_T(M) = \dfrac{1\,900}{2\,700} = \dfrac{19}{27} \approx 0{,}70$.
   Avec le même test, un résultat positif est bien plus fiable quand la maladie est fréquente.

Exercice 9 – Le témoin du taxi ★★★

1. Bleus : $1\,000 \times 0{,}15 = 150$.
   Le témoin a raison 8 fois sur 10 : $150 \times 0{,}8 = 120$ déclarés bleus.
   Verts : $1\,000 - 150 = 850$.
   Il se trompe 2 fois sur 10 : $850 \times 0{,}2 = 170$ déclarés bleus par erreur.

2. Condition D : on se place parmi les taxis déclarés bleus, $120 + 170 = 290$; 120 sont vraiment bleus.
   $P_D(B) = \dfrac{120}{120 + 170} = \dfrac{120}{290} = \dfrac{12}{29} \approx 0{,}41$.
   Moins d'une chance sur deux : malgré un témoin fiable à 80 %, le taxi est plus probablement vert, parce que les taxis verts sont bien plus nombreux.

3. Bleus déclarés bleus : $150 \times 0{,}9 = 135$.
   Verts déclarés bleus : $850 \times 0{,}1 = 85$.
   Déclarés bleus : $135 + 85 = 220$.
   $P_D(B) = \dfrac{135}{220} = \dfrac{27}{44} \approx 0{,}61$.
   Cette fois, le taxi est plus probablement bleu.

Exercice 10 – La probabilité manquante ★★★

1. « Parmi les non-juniors » : $P_{\overline{J}}(C) = x$.
   Arbre : $P(J) = 0{,}3$, $P_J(C) = 0{,}5$ (la moitié), $P(\overline{J}) = 0{,}7$.
   Deux chemins mènent à C : $J \to C$ et $\overline{J} \to C$.
   $P(C) = P(J) \times P_J(C) + P(\overline{J}) \times P_{\overline{J}}(C)$
   $P(C) = 0{,}3 \times 0{,}5 + 0{,}7 \times x = 0{,}15 + 0{,}7x$.

2. On sait que $P(C) = 0{,}29$.
   $0{,}15 + 0{,}7x = 0{,}29$
   $\iff 0{,}7x = 0{,}29 - 0{,}15 = 0{,}14$
   $\iff x = \dfrac{0{,}14}{0{,}7} = 0{,}2$.
   20 % des non-juniors font de la compétition.

3. Condition C : on utilise la formule, avec $P(J \cap C) = 0{,}15$ (question 1).
   $P_C(J) = \dfrac{P(J \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}15}{0{,}29} = \dfrac{15}{29} \approx 0{,}52$.
   Un peu plus d'un compétiteur sur deux est un junior, alors que les juniors ne sont que 30 % du club.

Exercice 11 – Trouve l'erreur ★★

Un arbre pondéré donne $P(A) = 0{,}4$, $P_A(B) = 0{,}5$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}1$. Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige.

a) *Un chemin se calcule par un produit, pas par une somme.*
Chemin $A \to B$: $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$.

b) *Ce sont deux probabilités « sachant » : il faut additionner les chemins entiers.*
Chemins $A \to B$ et $\overline{A} \to B$, avec $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.
$P(B) = 0{,}4 \times 0{,}5 + 0{,}6 \times 0{,}1 = 0{,}2 + 0{,}06 = 0{,}26$.

c) *Mauvais nœud : on reste sous $\overline{A}$.*
$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - P_{\overline{A}}(B) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

d) *La condition a changé : on divise par $P(B)$.*
$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, avec $P(A \cap B) = 0{,}2$ et $P(B) = 0{,}26$ (calculs a et b).
$P_B(A) = \dfrac{0{,}2}{0{,}26} = \dfrac{10}{13} \approx 0{,}77$.

e) *Le contraire de « A et B » n'est pas « A et non B ».*
Chemin $A \to \overline{B}$, avec $P_A(\overline{B}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.
$P(A \cap \overline{B}) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$.

f) *Confusion entre « parmi les blessés » et « parmi ceux qui ne s'échauffent pas ».*
80 % est la part des non-échauffés parmi les blessés.
Le risque de blessure sans échauffement demande de connaître le nombre total de joueurs qui ne s'échauffent pas.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Sur un arbre pondéré, la probabilité d'un chemin est :

Réponse B : le produit des probabilités de ses branches
On multiplie le long d'un chemin ; on additionne ensuite les chemins.

2. $P(A) = 0{,}2$, $P_A(B) = 0{,}5$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}25$. Alors $P(B)$ vaut :

Réponse D : $0{,}3$
Deux chemins mènent à B : $P(B) = 0{,}2 \times 0{,}5 + 0{,}8 \times 0{,}25 = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$.

3. Avec les mêmes données, $P_B(A)$ vaut :

Réponse A : $\dfrac{1}{3}$
$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}3} = \dfrac{1}{3}$.

4. « 90 % des malades ont un test positif » s'écrit :

Réponse C : $P_M(T) = 0{,}9$
« Parmi les malades » : la condition est M.

5. Une urne contient 3 boules noires et 2 blanches. On tire deux boules sans remise. La probabilité d'avoir deux noires est :

Réponse D : $\dfrac{3}{10}$
Au second tirage, il reste 2 noires sur 4 boules.
$\dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$.

6. Sur 200 élèves, il y a 80 filles, dont 20 internes, et 120 garçons, dont 40 internes. Un élève est interne : c'est une fille avec la probabilité :

Réponse A : $\dfrac{1}{3}$
Condition « interne » : $20 + 40 = 60$ internes, dont 20 filles.
$P = \dfrac{20}{60} = \dfrac{1}{3}$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).