1. Rappels de 6e : angles, perpendiculaires et parallèles

Ex. 1 ★☆☆ **Angles de sommet K : nommer, classer, partager**

(a) 91° : angle obtus (plus de 90° et moins de 180°). 90° : angle droit. 180° : angle plat (ses deux côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre).

(b) Le sommet est K (la lettre du milieu). Les côtés sont les demi-droites [KM) et [KN).

(c) Plusieurs angles ont pour sommet K : $\widehat{PKM}$, $\widehat{MKN}$ et $\widehat{PKN}$. Avec la seule lettre K, on ne sait pas duquel on parle. Il faut trois lettres.

(d) Dans $\widehat{KPM}$, la lettre du milieu est P : le sommet serait P, ce qui est faux. Le sommet est K, donc il faut écrire $\widehat{PKM}$ (ou $\widehat{MKP}$).

(e) Sur la figure, $\widehat{PKM}$ est aigu (plus petit qu'un angle droit), alors qu'un angle de 130° est obtus. Rayan a lu la mauvaise graduation du rapporteur. La vraie mesure est $180° - 130° = 50°$.

(f) La bissectrice partage l'angle en deux angles de même mesure.
Donc $\widehat{MKR} = 75° \div 2 = 37{,}5°$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : nature, bissectrice, rapporteur**

(a) 91° est compris entre 90° et 180° : l'angle est obtus (il n'est pas droit, il dépasse 90° de 1°).

(b) Un angle de 90° est droit. Un angle de 180° est plat : ses côtés forment une droite.

(c) La bissectrice partage l'angle en deux angles de même mesure, donc $\widehat{RSU} = 137° \div 2 = 68{,}5°$
(contrôle : $68{,}5° + 68{,}5° = 137°$).

(d) $\widehat{ABD}$ est la moitié de $\widehat{ABC}$, donc $\widehat{ABC} = 2 \times 37{,}5° = 75°$.

(e) Un angle aigu mesure moins de 90° : 133° est impossible. Maël a lu sur la mauvaise graduation. La vraie mesure est $180° - 133° = 47°$.

Ex. 3 ★★☆ **Plan de ville : choisir la bonne propriété**

(a) Lucas se trompe. On sait que $(AB) \perp (EF)$ et $(CD) \perp (EF)$. Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.
Donc $(AB) \parallel (CD)$: elles ne se coupent jamais, donc elles ne peuvent pas être perpendiculaires.

(b) Lina se trompe de propriété. On sait que $(KL) \parallel (AB)$ et que $(EF) \perp (AB)$. Or, si deux droites sont parallèles et qu'une troisième est perpendiculaire à l'une, alors elle est perpendiculaire à l'autre.
Donc $(EF) \perp (KL)$: (KL) et (EF) se coupent, elles ne sont pas parallèles.

(c) On sait que $(KL) \parallel (AB)$ et que $(CD) \parallel (AB)$ (démontré à la première question). Or, si deux droites sont parallèles à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.
Donc $(KL) \parallel (CD)$.

(d) On sait que $(RS) \perp (KL)$ et que $(EF) \perp (KL)$ (question 2). Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.
Donc $(RS) \parallel (EF)$.

Ex. 4 ★★☆ **L'éventail de Noé**

(a) Sur la figure, $\widehat{PRQ}$ est obtus : il mesure plus de 90°. Donc $\widehat{PRQ} = 116°$. La valeur 64° se lit sur la mauvaise graduation : $180° - 116° = 64°$.

(b) [RS) est la bissectrice de $\widehat{PRQ}$, donc $\widehat{PRS} = 116° \div 2 = 58°$. [RT) est la bissectrice de $\widehat{PRS}$, donc $\widehat{PRT} = 58° \div 2 = 29°$.

(c) $\widehat{TRQ} = \widehat{PRQ} - \widehat{PRT} = 116° - 29° = 87°$.

(d) Non. $\widehat{TRQ} = 87°$ et non 90° : l'angle a l'air droit, mais il est aigu, car 87° est inférieur à 90°.

Ex. 5 ★★★ **La charpente d'Inès**

(a) On sait que $(CD) \perp (CG)$ et que $(EF) \perp (CG)$ (angles droits codés en C et en E). Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.
Donc $(CD) \parallel (EF)$. Attention : elles sont parallèles, pas perpendiculaires.

Ex. 5 **(suite)**

(b) On sait que $(CD) \parallel (EF)$ (question précédente) et que $(MN) \perp (CD)$ (angle droit codé en M). Or, si deux droites sont parallèles et qu'une troisième est perpendiculaire à l'une, alors elle est perpendiculaire à l'autre.
Donc $(MN) \perp (EF)$.

(c) Non, son raisonnement n'est pas valable. Aucun angle droit n'est codé en G et le dessin n'est pas à l'échelle. On ne peut pas affirmer que $(GH) \perp (CG)$ en regardant la figure, donc on ne peut rien en déduire sur (GH) et
(EF).

(d) On sait que $(GH) \parallel (CD)$ et que $(EF) \parallel (CD)$ (question 1). Or, si deux droites sont parallèles à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.
Donc $(GH) \parallel (EF)$.

(e) On sait que $(GH) \parallel (CD)$ et que $(CG) \perp (CD)$ (angle droit codé en C). Or, si deux droites sont parallèles et qu'une troisième est perpendiculaire à l'une, alors elle est perpendiculaire à l'autre.
Donc $(CG) \perp (GH)$: l'angle en G est droit. Cette fois, c'est démontré, pas lu sur le dessin.

Ex. 6 ★★★ **Les rayons de soleil de Sacha**

(a) Plusieurs angles ont pour sommet S ($\widehat{ASC}$, $\widehat{BSD}$, …). « $\widehat{S}$ » ne dit donc pas de quel angle on parle. L'angle droit codé se note $\widehat{ASE}$ (ou $\widehat{ESA}$), avec le sommet S au milieu.

(b) [SC) est entre [SA) et [SE), donc $\widehat{ASC}$ est plus petit que l'angle droit $\widehat{ASE}$: il est aigu. Il ne peut donc pas mesurer 143°. Sacha a lu la mauvaise graduation. La bonne est celle qui part du 0 placé sur [SA) : $\widehat{ASC} = 37°$. On vérifie : $180° - 143° = 37°$.

(c) Les points A, S et B sont alignés : l'autre graduation part du 0 placé sur [SB). Le nombre 143 est donc la mesure de $\widehat{BSC}$. Comme $90° < 143° < 180°$, l'angle $\widehat{BSC}$ est obtus.

(d) On sait que [SD) est la bissectrice de $\widehat{BSC}$ et que $\widehat{BSC} = 143°$. Or la bissectrice partage un angle en deux angles de même mesure, chacun égal à la moitié de l'angle.
Donc $\widehat{BSD} = 143° \div 2 = 71{,}5°$. Comme $71{,}5° < 90°$, l'angle $\widehat{BSD}$ est aigu.

Ex. 7 ★★★ **La voie ferrée**

(a) On sait que $(AB) \parallel (CD)$ et que $(EF) \perp (AB)$. Or, si deux droites sont parallèles et qu'une troisième est perpendiculaire à l'une, alors elle est perpendiculaire à l'autre.
Donc $(EF) \perp (CD)$.

(b) On sait que $(MN) \parallel (CD)$ et que $(AB) \parallel (CD)$. Or, si deux droites sont parallèles à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.
Donc $(MN) \parallel (AB)$.

(c) On sait que $(GH) \perp (MN)$ et que $(MN) \parallel (AB)$ (question 2). Or, si deux droites sont parallèles et qu'une troisième est perpendiculaire à l'une, alors elle est perpendiculaire à l'autre.
Donc $(GH) \perp (AB)$. On sait aussi que $(EF) \perp (AB)$. Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.
Donc $(GH) \parallel (EF)$.

(d) Non, Nathan a tort. On sait que $(PQ) \parallel (EF)$ et que $(AB) \perp (EF)$. Or, si deux droites sont parallèles et qu'une troisième est perpendiculaire à l'une, alors elle est perpendiculaire à l'autre.
Donc $(AB) \perp (PQ)$. Deux droites perpendiculaires se coupent : elles ne sont jamais parallèles.

2. *Angles adjacents, complémentaires, supplémentaires*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes — Reconnaître des angles adjacents**

(a) Oui : ils ont le même sommet S, le côté commun [ST), et ils sont de part et d'autre de ce côté.

(b) Non : ils ont bien le même sommet S et le côté commun [SM), mais ils sont du même côté de [SM). $\widehat{TSM}$ est à l'intérieur de $\widehat{RSM}$: ils se chevauchent. Ils ne sont donc pas adjacents.

(c) $\widehat{RSM}$: même sommet S, côté commun [SM), et les deux angles sont de part et d'autre de [SM). $\widehat{RST}$ n'a aucun côté commun avec $\widehat{MSN}$. $\widehat{TSN}$ a le côté commun [SN), mais il contient $\widehat{MSN}$: ils se chevauchent.

(d) $\widehat{MSN}$: même sommet S, côté commun [SM), et les deux angles sont de part et d'autre de [SM).

(e) $\widehat{RST}$ et $\widehat{TSM}$ sont adjacents, donc $\widehat{RSM} = 40° + 55° = 95°$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes — Complémentaire ou supplémentaire ?**

(a) $\widehat{EFH}$ et $\widehat{HFG}$ sont adjacents et forment l'angle droit $\widehat{EFG}$, donc $\widehat{HFG} = 90° - 58° = 32°$.

(b) $90° - 47{,}5° = 42{,}5°$.

(c) $180° - 123° = 57°$.

(d) Non : $104°$ est un angle obtus, il dépasse déjà $90°$. Il n'a pas de complémentaire ; une mesure négative est une erreur.

(e) $180° - 71{,}5° = 108{,}5°$.

(f) Oui : $29° + 61° = 90°$. Ils sont complémentaires, même s'ils ne sont pas adjacents.

Ex. 10 ★★☆ **Trois rues sur une avenue**

(a) On sait que $\widehat{LTV}$ et $\widehat{VTN}$ sont adjacents et que L, T, N sont alignés. Or deux angles adjacents qui forment un angle plat sont supplémentaires.
Donc $\widehat{VTN} = 180° - 41° = 139°$.

(b) On sait que $\widehat{VTW}$ et $\widehat{WTN}$ sont adjacents et forment l'angle $\widehat{VTN}$. Or les mesures de deux angles adjacents s'additionnent.
Donc $\widehat{WTN} = 139° - 87{,}5° = 51{,}5°$.

(c) $\widehat{LTV}$ et $\widehat{VTW}$ sont adjacents, donc $\widehat{LTW} = 41° + 87{,}5° = 128{,}5°$. Il est compris entre $90°$ et $180°$: c'est un angle obtus.

(d) Non : $41° + 51{,}5° = 92{,}5°$, et non $90°$. Ces deux angles ne sont pas complémentaires.

Ex. 11 ★★☆ **La jambe de force d'une charpente**

(a) On sait que $\widehat{PGR}$ et $\widehat{RGQ}$ sont adjacents et que P, G, Q sont alignés. Or deux angles adjacents qui forment un angle plat sont supplémentaires.
Donc $\widehat{RGQ} = 180° - 68° = 112°$.

(b) On sait que [GS) est la bissectrice de $\widehat{RGQ}$. Or la bissectrice partage un angle en deux angles de même mesure.
Donc $\widehat{RGS} = 112° \div 2 = 56°$.

(c) On sait que $\widehat{PGR}$ et $\widehat{RGS}$ sont adjacents. Or les mesures de deux angles adjacents s'additionnent.
Donc $\widehat{PGS} = 68° + 56° = 124°$.

(d) Non : le même sommet ne suffit pas. Ces deux angles n'ont pas de côté commun et ils se chevauchent (l'angle $\widehat{RGS}$ fait partie des deux). Ils ne sont pas adjacents.

Ex. 12 ★★★ **Les rayons du soleil couchant**

(a) On sait que $\widehat{AOD}$ est droit et que les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{COD}$ sont adjacents : ensemble, ils forment $\widehat{AOD}$. Or deux angles adjacents qui forment un angle droit sont complémentaires.
Donc $\widehat{COD} = 90° - 32{,}5° = 57{,}5°$.

(b) On sait que A, O et B sont alignés et que $\widehat{AOD} = 90°$.
Donc $\widehat{DOB} = 180° - 90° = 90°$. On sait aussi que $\widehat{DOE}$ et $\widehat{EOB}$ sont adjacents et forment l'angle droit $\widehat{DOB}$.
Donc $\widehat{DOE} = 90° - 57{,}5° = 32{,}5°$.

(c) Non. On calcule : $32{,}5° + 57{,}5° = 90°$. Or deux angles sont complémentaires si la somme de leurs mesures vaut $90°$.
Donc $\widehat{AOC}$ et $\widehat{EOB}$ sont complémentaires. Ils ne sont pas adjacents, mais ce n'est pas obligatoire : il suffit que leur somme fasse $90°$.

(d) Non. Ils ont le même sommet O et un côté commun [OD), mais [OC) est à l'intérieur de $\widehat{AOD}$: les deux angles sont du même côté de [OD), ils se chevauchent. Ils ne sont pas situés de part et d'autre du côté commun, donc ils ne sont pas adjacents.

(e) On sait que $\widehat{AOE}$ et $\widehat{EOB}$ sont adjacents et forment l'angle plat $\widehat{AOB}$.
Donc $\widehat{AOE} = 180° - 57{,}5° = 122{,}5°$. Cet angle est obtus : sa mesure dépasse déjà $90°$. Le calcul $90° - 122{,}5°$ donnerait un nombre négatif, ce qui est impossible pour une mesure. $\widehat{AOE}$ n'a donc pas de complémentaire.

Ex. 13 ★★★ **Les haubans d'un pont**

(a) On sait que $\widehat{PTC}$ et $\widehat{CTD}$ ont le même sommet T, le côté commun [TC), et sont de part et d'autre de ce côté. Or les mesures de deux angles adjacents s'additionnent.
Donc $\widehat{PTD} = 27{,}5° + 18° = 45{,}5°$.

(b) On sait que $(MN) \perp (TP)$, donc $\widehat{NTP} = 90°$, et que $\widehat{PTD}$ et $\widehat{DTN}$ sont adjacents et forment cet angle droit. Donc ils sont complémentaires : $\widehat{DTN} = 90° - 45{,}5° = 44{,}5°$.

(c) Deux angles supplémentaires ont des mesures dont la somme vaut $180°$.
Donc $\widehat{MTE} = 180° - 143° = 37°$.

Ex. 13 **(suite)**

(d) Lina confond supplémentaires et complémentaires. On sait que M, T et N sont alignés et que $\widehat{NTP} = 90°$, donc $\widehat{MTP} = 180° - 90° = 90°$. Les angles $\widehat{MTE}$ et $\widehat{ETP}$ sont adjacents et forment l'angle droit $\widehat{MTP}$: ils sont complémentaires.
Donc $\widehat{ETP} = 90° - 37° = 53°$.

(e) Les angles $\widehat{ETP}$ et $\widehat{PTD}$ sont adjacents, avec le côté commun [TP).
Donc $\widehat{ETD} = 53° + 45{,}5° = 98{,}5°$. Vérification : $37° + 98{,}5° + 44{,}5° = 180°$. Ces trois angles adjacents forment bien l'angle plat $\widehat{MTN}$.

Ex. 14 ★★★ **Alignés ou presque ?**

(a) On sait que $\widehat{RKA}$ et $\widehat{AKB}$ sont adjacents (même sommet K, côté commun [KA), de part et d'autre). Or les mesures de deux angles adjacents s'additionnent.
Donc $\widehat{RKB} = 41{,}5° + 47° = 88{,}5°$.

(b) Non. On sait que $\widehat{RKB} = 88{,}5°$. Or deux droites sont perpendiculaires si elles forment un angle droit, c'est-à-dire de $90°$. Ici $88{,}5° \neq 90°$, donc (KB) n'est pas perpendiculaire à (RS). On ne conclut jamais à vue : la figure n'est pas à l'échelle.

(c) On sait que R, K et S sont alignés et que $\widehat{RKB}$ et $\widehat{BKS}$ sont adjacents : ensemble, ils forment l'angle plat $\widehat{RKS}$.
Donc $\widehat{BKS} = 180° - 88{,}5° = 91{,}5°$.

(d) Non. On sait que $\widehat{BKS}$ et $\widehat{SKD}$ sont adjacents (côté commun [KS), B et D de part et d'autre).
Donc $\widehat{BKD} = 91{,}5° + 88° = 179{,}5°$. Or B, K et D sont alignés seulement si $\widehat{BKD}$ est un angle plat de $180°$.
Comme $179{,}5° \neq 180°$, B, K et D ne sont pas alignés.

(e) Il faut que $\widehat{BKS} + \widehat{SKD} = 180°$. Il faudrait donc $\widehat{SKD} = 180° - 91{,}5° = 88{,}5°$.

3. *Angles opposés par le sommet*

Ex. 15 ★☆☆ **Reconnaître des angles opposés par le sommet**

(a) [OS) est dans le prolongement de [OR) et [OU) est dans le prolongement de [OT). L'angle opposé par le sommet à $\widehat{ROT}$ est donc $\widehat{SOU}$.

(b) [OR) est dans le prolongement de [OS) et [OU) est dans le prolongement de [OT). L'angle opposé par le sommet à $\widehat{TOS}$ est donc $\widehat{UOR}$.

Ex. 15 **(suite)**

(c) Non. [OS) est bien dans le prolongement de [OR), mais [OV) n'est pas dans le prolongement de [OT) : le côté qui prolonge [OT) est [OU). Avoir le même sommet ne suffit pas, il faut aussi que les côtés soient dans le prolongement l'un de l'autre.

(d) $\widehat{TOS}$, car avec $\widehat{ROT}$ il forme l'angle plat $\widehat{ROS}$. Et $\widehat{ROU}$, car avec $\widehat{ROT}$ il forme l'angle plat $\widehat{TOU}$. Chacun est donc supplémentaire de $\widehat{ROT}$: $\widehat{TOS} = \widehat{ROU} = 180° - 105° = 75°$.

Ex. 16 ★★☆ **Les quatre angles de deux droites sécantes**

(a) On sait que $\widehat{LPN}$ et $\widehat{KPM}$ sont opposés par le sommet. Or deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
Donc $\widehat{LPN} = 47{,}5°$.

(b) On sait que les angles $\widehat{KPM}$ et $\widehat{KPN}$ sont adjacents et que les points M, P et N sont alignés. Or deux angles adjacents qui forment un angle plat sont supplémentaires.
Donc $\widehat{KPN} = 180° - 47{,}5° = 132{,}5°$.

(c) On sait que $\widehat{MPL}$ et $\widehat{KPN}$ sont opposés par le sommet. Or deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
Donc $\widehat{MPL} = 132{,}5°$.

(d) $47{,}5° + 132{,}5° + 47{,}5° + 132{,}5° = 360°$: les quatre angles font bien un tour complet.

Ex. 17 ★★☆ **Sur le plan de la ville : corrige les erreurs**

(a) Deux angles opposés par le sommet ne sont pas supplémentaires : ils sont égaux. On sait que $\widehat{BID}$ et $\widehat{AIC}$ sont opposés par le sommet. Or deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
Donc $\widehat{BID} = 58°$.

(b) Non : le plan n'est pas à l'échelle, et on justifie avec une propriété, pas avec le dessin. On sait que $\widehat{AIC}$ et $\widehat{AID}$ sont adjacents et que les points C, I et D sont alignés. Or deux angles adjacents qui forment un angle plat sont supplémentaires.
Donc $\widehat{AID} = 180° - 58° = 122°$: ce n'est pas un angle droit.

(c) On sait que $\widehat{BIC}$ et $\widehat{AID}$ sont opposés par le sommet. Or deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
Donc $\widehat{BIC} = 122°$.

Ex. 18 ★★☆ **Trois coutures sur une voile**

(a) On sait que les points E, O et F sont alignés, donc $\widehat{EOF}$ est un angle plat : $\widehat{EOG} + \widehat{GOJ} + \widehat{JOF} = 180°$.
Donc $\widehat{JOF} = 180° - (52° + 71°) = 57°$.

(b) On sait que $\widehat{HOK}$ et $\widehat{GOJ}$ sont opposés par le sommet ([OH) prolonge [OG) et [OK) prolonge [OJ)). Or deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
Donc $\widehat{HOK} = 71°$.

(c) On sait que $\widehat{KOE}$ et $\widehat{JOF}$ sont opposés par le sommet ([OK) prolonge [OJ) et [OE) prolonge [OF)). Or deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
Donc $\widehat{KOE} = 57°$.

(d) Première façon : les points J, O et K sont alignés, donc $\widehat{GOJ}$ et $\widehat{GOK}$ sont supplémentaires : $\widehat{GOK} = 180° - 71° = 109°$. Deuxième façon : $\widehat{GOE}$ et $\widehat{EOK}$ sont adjacents, donc $\widehat{GOK} = 52° + 57° = 109°$.

Ex. 19 ★★★ **Même sommet, mais opposés ?**

(a) On sait que $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont adjacents, donc $\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 41° + 139° = 180°$. Or un angle de 180° est un angle plat.
Donc $\widehat{AOC}$ est plat : les points A, O et C sont alignés.

(b) Non. On sait que $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COD}$ sont adjacents, donc $\widehat{BOD} = 139° + 32° = 171°$, et non 180° : l'angle $\widehat{BOD}$ n'est pas plat, donc [OB) et [OD) ne sont pas dans le prolongement l'une de l'autre. Or deux angles opposés par le sommet ont des côtés dans le prolongement l'un de l'autre.
Donc $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ ne sont pas opposés par le sommet.
D'ailleurs, leurs mesures ne sont pas égales : $41^\circ \neq 32^\circ$.
Il ne faut pas se fier au dessin.

(c) On sait que A, O, C sont alignés (question précédente) et que B, O, E sont alignés : [OC) prolonge [OA) et [OE) prolonge [OB).
Donc l'angle opposé par le sommet à $\widehat{AOB}$ est $\widehat{COE}$. Or deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
Donc $\widehat{COE} = \widehat{AOB} = 41°$.

(d) On sait que [OD) est à l'intérieur de l'angle $\widehat{COE}$, donc $\widehat{COD}$ et $\widehat{DOE}$ sont adjacents et $\widehat{COD} + \widehat{DOE} = \widehat{COE}$.
Donc $\widehat{DOE} = 41° - 32° = 9°$.

Ex. 20 ★★★ **Trois poutres d'un pont**

(a) On sait que M, K, N sont alignés, donc $\widehat{MKN}$ est plat ; $\widehat{MKR}$ et $\widehat{RKN}$ sont adjacents et forment cet angle plat.
Donc ils sont supplémentaires : $\widehat{MKR} = 180° - 127{,}5° = 52{,}5°$.

(b) On sait que $(MN) \perp (PQ)$, donc $\widehat{MKP} = 90°$. Comme [KR) est à l'intérieur de $\widehat{MKP}$, les angles $\widehat{MKR}$ et $\widehat{PKR}$ sont adjacents et complémentaires.
Donc $\widehat{PKR} = 90° - 52{,}5° = 37{,}5°$.

(c) [KS) est bien dans le prolongement de [KR), mais le côté qui prolonge [KN) est [KM), pas [KQ) : l'angle opposé à $\widehat{RKN}$ est $\widehat{SKM}$. On sait que [KS) prolonge [KR) et que [KQ) prolonge [KP) : $\widehat{SKQ}$ et $\widehat{PKR}$ sont opposés par le sommet. Or deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
Donc $\widehat{SKQ} = 37{,}5°$.

(d) On sait que les droites (MN) et (RS) se coupent en K et que $\widehat{NKS}$ et $\widehat{MKR}$ sont opposés par le sommet. Or deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
Donc $\widehat{NKS} = \widehat{MKR} = 52{,}5°$.

Ex. 21 ★★★ **La table pliante de camping**

(a) On sait que OA = OB : le triangle OAB est isocèle en O. Or, dans un triangle isocèle, les angles à la base ont la même mesure.
Donc $\widehat{OBA} = 66°$. La somme des angles d'un triangle vaut 180°, donc $\widehat{AOB} = 180° - (66° + 66°) = 48°$.

(b) On sait que les droites (AD) et (BC) se coupent en O et que $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont opposés par le sommet. Or deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
Donc $\widehat{COD} = 48°$.

(c) Non : $\widehat{AOC}$ et $\widehat{AOB}$ ont le côté commun [OA), ce sont des angles adjacents. Comme C, O, B sont alignés, ils forment l'angle plat $\widehat{COB}$: ils sont supplémentaires.
Donc $\widehat{AOC} = 180° - 48° = 132°$.

(d) On sait que OC = OD : le triangle OCD est isocèle en O, donc $\widehat{OCD} = \widehat{ODC}$. La somme des angles d'un triangle vaut 180°, donc $\widehat{ODC} = (180° - 48°) \div 2 = 66°$.

Ex. 21 **(suite)**

(e) Oui. On sait que les droites (AB) et (CD) sont coupées par la sécante (AD), que $\widehat{BAD}$ et $\widehat{ADC}$ sont alternes-internes et qu'ils mesurent tous les deux 66°. Or, si deux angles alternes-internes ont la même mesure, alors les droites sont parallèles.
Donc $(AB) \parallel (CD)$.

4. *Reconnaître des angles alternes-internes et correspondants*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : une sécante qui descend**

(a) Les deux angles sont du même côté de la sécante (KL), côté S et U, et au-dessus de chaque droite. $\widehat{KMS}$ est à l'extérieur, $\widehat{UNM}$ entre les droites. Ils dessinent un F : ils sont correspondants.

(b) $\widehat{SMN}$ est entre les droites, du côté de S par rapport à la sécante (KL), en dessous de (RS). Son correspondant est du même côté de (KL), en dessous de (TU), donc à l'extérieur : $\widehat{UNL}$. Les deux angles dessinent un F.

(c) $\widehat{MNU}$ a pour sommet N (la lettre du milieu). Il est entre les droites, du côté de U par rapport à la sécante (KL). Son alterne-interne est entre les droites, de l'autre côté de (KL) : $\widehat{RMN}$ (on peut aussi l'écrire $\widehat{NMR}$). Les deux angles dessinent un Z.

(d) Les deux angles ont le même sommet M. Ce n'est donc ni une paire d'alternes-internes ni une paire de correspondants : il faudrait un angle de sommet M et un angle de sommet N. Ils sont opposés par le sommet.

(e) Les points K, M et N sont alignés, donc $\widehat{KMS}$ et $\widehat{SMN}$ sont adjacents et supplémentaires : $\widehat{SMN} = 180° - 124° = 56°$. $\widehat{SMN}$ et $\widehat{TNM}$ sont bien alternes-internes (entre les droites, de part et d'autre de (KL)), mais $56° \neq 67{,}5°$. Mia a tort : le nom donne la place, pas l'égalité. Des angles alternes-internes n'ont la même mesure que si les droites sont parallèles. Ici, leurs mesures sont différentes, donc (RS) et (TU) ne sont pas parallèles.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : une figure couchée**

(a) La sécante est (PV), pas (GH) : elle coupe (PQ) en P et (VW) en V. $\widehat{QPV}$ et $\widehat{WVP}$ sont entre (PQ) et (VW), de part et d'autre de (PV) : ils dessinent un Z.

(b) La sécante qui passe par I et J est (GH). $\widehat{QIJ}$ est entre les deux droites, au-dessus de (GH). Son alterne-interne est entre les droites, en dessous de (GH) : $\widehat{IJW}$.

Ex. 23 **(suite)**

(c) $\widehat{GIQ}$ est à gauche de (PQ), au-dessus de la sécante (GH). Son correspondant est à gauche de (VW), au-dessus de (GH) : $\widehat{VJI}$.

(d) Le sommet est la lettre du milieu : J. Les côtés de $\widehat{WJH}$ sont [JW) et [JH). Cet angle est à droite de (VW), en dessous de la sécante (GH). Son correspondant est à droite de (PQ), en dessous de (GH) : $\widehat{PIJ}$.

(e) Non. Les deux angles sont bien du même côté de la sécante (au-dessus de (GH)). Mais $\widehat{QIG}$ est à gauche de (PQ) et $\widehat{HJV}$ à droite de (VW) : aucun des deux n'est entre les droites. Pour être correspondants, l'un doit être entre les droites et l'autre dehors. Ils ne sont ni correspondants, ni alternes-internes.

(f) Non. $\widehat{QIJ}$ a pour côtés [IQ) et [IJ) : il est formé avec la sécante (GH). $\widehat{PWV}$ a pour côtés [VP) et [VW) : il est formé avec la sécante (PV). Deux angles alternes-internes ont la même sécante et un sommet à chacun de ses deux points d'intersection. Ils ne sont ni alternes-internes, ni correspondants.

Ex. 24 ★★☆ **Deux sécantes : laquelle ?**

(a) Les sommets sont E et F : la sécante est (EF). Les deux angles sont entre (AB) et (CD), et de part et d'autre de (EF) (côté B pour l'un, côté C pour l'autre). Ils dessinent un Z : ils sont alternes-internes.

(b) On sait que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et que $\widehat{BEF}$ et $\widehat{EFC}$ sont alternes-internes (sécante (EF)). Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure.
Donc $\widehat{EFC} = 71{,}5°$.

(c) Les sommets sont H et G : la sécante est (GH). Les deux angles sont entre (AB) et (CD), et de part et d'autre de (GH) (côté C pour l'un, côté B pour l'autre). Ils dessinent un Z : ils sont alternes-internes.

(d) Non. Le côté [EF) de $\widehat{BEF}$ est sur la sécante (EF), alors que le côté [HG) de $\widehat{GHD}$ est sur l'autre sécante (GH). Deux angles alternes-internes sont formés avec la même sécante : ces deux angles ne forment aucune paire.

Ex. 25 ★★☆ **Même nom, mesures différentes**

(a) Leurs sommets M et N sont sur la sécante (ST). Les deux angles sont entre (KL) et (PQ), et de part et d'autre de (ST) (côté L pour l'un, côté P pour l'autre) : ils dessinent un Z. Ils sont donc alternes-internes.

Ex. 25 **(suite)**

(b) Non. $\widehat{LMN} = 70°$ et $\widehat{MNP} = 55°$: les mesures sont différentes. Les angles alternes-internes ont la même mesure seulement si les droites sont parallèles, et ici (KL) et (PQ) ne le sont pas.

(c) On sait que K, M et L sont alignés, donc $\widehat{KMN}$ et $\widehat{LMN}$ sont supplémentaires. Or la somme de deux angles supplémentaires est 180°.
Donc $\widehat{KMN} = 180° - 70° = 110°$. Il est entre les droites, du côté de K et P ; son correspondant de sommet N est au-dessus de (PQ), du même côté : $\widehat{PNT}$.

(d) On sait que M, N et T sont alignés, donc $\widehat{PNT}$ et $\widehat{PNM}$ sont supplémentaires. Or la somme de deux angles supplémentaires est 180°.
Donc $\widehat{PNT} = 180° - 55° = 125°$. Comme $125° \neq 110°$, ces angles sont correspondants mais ils n'ont pas la même mesure, car les droites ne sont pas parallèles.

Ex. 26 ★★★ **Z ou F sur deux droites qui se rapprochent**

(a) La sécante est (YZ) : elle coupe (FG) en P et (JK) en Q. Les quatre paires d'angles correspondants (à la même place en P et en Q) sont : $\widehat{YPG}$ et $\widehat{PQK}$; $\widehat{GPQ}$ et $\widehat{KQZ}$; $\widehat{QPF}$ et $\widehat{ZQJ}$; $\widehat{FPY}$ et $\widehat{JQP}$.

(b) On sait que $\widehat{GPQ}$ et $\widehat{FPY}$ sont opposés par le sommet. Or deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
Donc $\widehat{GPQ} = 60°$. De même, $\widehat{PQJ}$ et $\widehat{ZQK}$ sont opposés par le sommet, donc $\widehat{PQJ} = 66°$.

(c) Tom se trompe deux fois. D'abord, le nom d'une paire dépend de la place des angles, pas de leurs mesures. Ensuite, $\widehat{QPG}$ est entre les deux droites, à droite de la sécante, et $\widehat{JQP}$ est entre les deux droites, à gauche de la sécante : ils dessinent un Z. Ils sont donc alternes-internes, pas correspondants.

(d) C'est $\widehat{FPQ}$: il est entre les deux droites, à gauche de la sécante, alors que $\widehat{KQP}$ est entre les deux droites, à droite. On sait que F, P et G sont alignés, donc $\widehat{FPQ}$ et $\widehat{QPG}$ sont supplémentaires. Or la somme de deux angles supplémentaires est 180°.
Donc $\widehat{FPQ} = 180° - 60° = 120°$. De même, J, Q et K sont alignés, donc $\widehat{KQP} = 180° - 66° = 114°$. Ces deux angles sont alternes-internes, mais ils n'ont pas la même mesure : les droites (FG) et (JK) ne sont pas parallèles.

Ex. 27 ★★★ **Plan de ville : deux rues, deux sécantes**

(a) La sécante est le boulevard (GH) : il coupe (AG) en G et (CD) en H. $\widehat{HGA}$ est entre les deux rues, d'un côté de (GH). $\widehat{GHD}$ est entre les deux rues, de l'autre côté de (GH). Ils dessinent un Z : ils sont alternes-internes.

(b) On sait que les droites (AG) et (CD) sont parallèles et que $\widehat{HGA}$ et $\widehat{GHD}$ sont alternes-internes. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure.
Donc $\widehat{GHD} = 47{,}5°$.

(c) On sait que M, E et F sont alignés, donc $\widehat{MEG}$ et $\widehat{FEG}$ sont supplémentaires. Or la somme de deux angles supplémentaires est 180°.
Donc $\widehat{MEG} = 180° - 74° = 106°$.

(d) $\widehat{MEG}$ est sous la rue (AG), à droite de l'avenue. L'angle à la même place en F est $\widehat{EFH}$ (on peut aussi l'écrire $\widehat{EFD}$). On sait que (AG) et (CD) sont parallèles et que $\widehat{MEG}$ et $\widehat{EFH}$ sont correspondants. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles correspondants ont la même mesure.
Donc $\widehat{EFH} = 106°$.

(e) Non. Pour former une paire d'alternes-internes ou de correspondants, les deux angles doivent avoir leurs sommets aux deux points où la même sécante coupe les deux droites. Ici, $\widehat{FEG}$ est formé avec l'avenue (MF) et $\widehat{AGH}$ avec le boulevard (GH). De plus, E et G sont tous les deux sur (AG). Ces angles ne forment aucune de ces paires.

Ex. 28 ★★★ **La couture d'une voile**

(a) La sécante est (AB) : elle coupe (MN) en M et (BC) en B. $\widehat{NMA}$ est à l'extérieur des deux droites (du côté de A) et $\widehat{CBA}$ est entre les deux droites. Les deux angles sont du même côté de (AB), celui de C. Ils dessinent un F : ils sont correspondants.

(b) La sécante est (BN) : elle coupe (MN) en N et (BC) en B. Les deux angles sont entre (MN) et (BC). $\widehat{BNM}$ est du côté de M et $\widehat{NBC}$ est du côté de C, donc de part et d'autre de (BN). Ils dessinent un Z : ils sont alternes-internes.

(c) Non. Pour la sécante (AB), ces deux angles sont bien entre les droites (MN) et (BC), mais ils sont du même côté de la sécante (celui de C). Ils ne sont donc pas de part et d'autre de la sécante : ils ne sont ni alternes-internes, ni correspondants.

Ex. 28 (suite)

(d) On sait que AMN est un triangle, avec $\widehat{MAN} = \widehat{BAC} = 67°$ et $\widehat{ANM} = 56°$. Or la somme des angles d'un triangle est 180°.
Donc $\widehat{AMN} = 180° - (67° + 56°) = 57°$.

(e) Non. On sait que $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ sont correspondants (sécante (AB)), avec $\widehat{AMN} = 57°$ et $\widehat{ABC} = 64°$. Or, si deux droites coupées par une sécante forment des angles correspondants de mesures différentes, alors ces droites ne sont pas parallèles.
Donc (MN) et (BC) ne sont pas parallèles. On ne peut pas prouver un parallélisme en regardant le dessin.

5. *Calculer un angle avec des droites parallèles*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : un angle connu, une propriété**

(a) L'angle alterne-interne de $\widehat{LPT}$ est $\widehat{MTP}$. On sait que les droites (KL) et (MN) sont parallèles et que les angles $\widehat{LPT}$ et $\widehat{MTP}$ sont alternes-internes. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure.
Donc $\widehat{MTP} = 58°$.

(b) On sait que les droites (KL) et (MN) sont parallèles et que les angles $\widehat{LPT}$ et $\widehat{NTV}$ sont correspondants. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles correspondants ont la même mesure.
Donc $\widehat{NTV} = 58°$.

(c) On sait que les angles $\widehat{KPT}$ et $\widehat{LPT}$ sont adjacents et forment l'angle plat $\widehat{KPL}$. Or, deux angles qui forment un angle plat sont supplémentaires.
Donc $\widehat{KPT} = 180° - 58° = 122°$. Attention : il ne mesure pas 58°, car ce n'est ni l'alterne-interne ni le correspondant de $\widehat{LPT}$.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : la propriété s'applique-t-elle ?**

(a) Vrai. On sait que les droites (EB) et (CD) sont parallèles et que les angles $\widehat{BEF}$ et $\widehat{CFE}$ sont alternes-internes. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure.
Donc $\widehat{CFE} = 74{,}5°$.

Ex. 30 (suite)

(b) Non. $\widehat{DFE}$ et $\widehat{BEF}$ sont tous les deux entre les parallèles et du même côté de la sécante. Ils ne sont donc ni alternes-internes ni correspondants : on ne peut pas affirmer qu'ils sont égaux. En fait, $\widehat{DFM}$ est le correspondant de $\widehat{BEF}$, donc $\widehat{DFM} = 74{,}5°$. Et $\widehat{DFE}$ forme avec lui l'angle plat $\widehat{EFM}$: $\widehat{DFE} = 180° - 74{,}5° = 105{,}5°$.

(c) Non. $\widehat{HKM}$ et $\widehat{BEF}$ sont bien correspondants, mais l'énoncé ne dit pas que (KH) est parallèle à (EB). La propriété ne s'applique donc pas. Même si les droites ont l'air parallèles sur la figure, qui n'est pas à l'échelle, on ne peut rien affirmer sur $\widehat{HKM}$.

(d) Faux. Les deux angles sont du même côté de la sécante (LM). $\widehat{BEF}$ est entre les parallèles et $\widehat{DFM}$ est à l'extérieur, mais ils sont placés de la même façon : ils sont correspondants, pas alternes-internes.

Ex. 31 ★★☆ **Parallèles obliques : enchaîner deux propriétés**

(a) On sait que les angles $\widehat{SIB}$ et $\widehat{SIJ}$ sont adjacents et forment l'angle plat $\widehat{BIJ}$. Or, deux angles qui forment un angle plat sont supplémentaires.
Donc $\widehat{SIJ} = 180° - 139° = 41°$. On sait aussi que les droites (QS) et (UW) sont parallèles et que les angles $\widehat{SIJ}$ et $\widehat{UJI}$ sont alternes-internes. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure.
Donc $\widehat{UJI} = 41°$.

(b) On sait que les angles $\widehat{QIJ}$ et $\widehat{SIB}$ sont opposés par le sommet. Or, deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
Donc $\widehat{QIJ} = 139°$. On sait aussi que les droites (QS) et (UW) sont parallèles et que les angles $\widehat{QIJ}$ et $\widehat{WJI}$ sont alternes-internes. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure.
Donc $\widehat{WJI} = 139°$.

(c) On sait que les droites (QS) et (UW) sont parallèles et que les angles $\widehat{UJI}$ et $\widehat{SIJ}$ sont alternes-internes. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure.
Donc $\widehat{SIJ} = 36{,}5°$. On sait aussi que les angles $\widehat{SIJ}$ et $\widehat{SIB}$ sont adjacents et forment l'angle plat $\widehat{BIJ}$. Or, deux angles qui forment un angle plat sont supplémentaires.
Donc $\widehat{SIB} = 180° - 36{,}5° = 143{,}5°$.

Ex. 32 ★★☆ **Le passage à niveau**

(a) On sait que les rails (AB) et (CD) sont parallèles et que les angles $\widehat{AOP}$ et $\widehat{CPT}$ sont correspondants. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles correspondants ont la même mesure.
Donc $\widehat{CPT} = 127{,}5°$.

(b) On sait que les angles $\widehat{AOP}$ et $\widehat{BOP}$ sont adjacents et forment l'angle plat $\widehat{AOB}$. Or, deux angles qui forment un angle plat sont supplémentaires.
Donc $\widehat{BOP} = 180° - 127{,}5° = 52{,}5°$. On sait aussi que les rails (AB) et (CD) sont parallèles et que les angles $\widehat{BOP}$ et $\widehat{CPO}$ sont alternes-internes. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure.
Donc $\widehat{CPO} = 52{,}5°$.

(c) Les deux angles sont bien opposés par le sommet. Mais deux angles opposés par le sommet ont la même mesure : ils ne sont pas supplémentaires. Lila les a confondus avec deux angles adjacents qui forment un angle plat.
Donc $\widehat{BOR} = \widehat{AOP} = 127{,}5°$.

Ex. 33 ★★★ **La charpente : parallèles, triangle et piège du 180°**

(a) On sait que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. On sait aussi que, avec la sécante (SM), les angles $\widehat{ASM}$ et $\widehat{SMN}$ sont alternes-internes. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure.
Donc $\widehat{SMN} = 53{,}5°$.

(b) On sait que (AB) et (CD) sont parallèles. On sait aussi que, avec la sécante (SN), les angles $\widehat{BSN}$ et $\widehat{SNM}$ sont alternes-internes. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure.
Donc $\widehat{SNM} = 73°$.

(c) On sait que $\widehat{SMN} = 53{,}5°$ et $\widehat{SNM} = 73°$. Or, la somme des angles d'un triangle vaut 180°.
Donc $\widehat{MSN} = 180° - (53{,}5° + 73°) = 180° - 126{,}5° = 53{,}5°$.

(d) Non. $\widehat{BSN}$ et $\widehat{DNS}$ sont du même côté de la sécante (SN) : ils ne sont ni alternes-internes ni correspondants, donc on ne peut pas dire qu'ils sont égaux. On sait que M, N et D sont alignés : les angles $\widehat{SNM}$ et $\widehat{DNS}$ sont adjacents et forment l'angle plat $\widehat{MND}$. Or, deux angles qui forment un angle plat sont supplémentaires.
Donc $\widehat{DNS} = 180° - 73° = 107°$.

Ex. 33 (suite)

(e) On sait que $\widehat{SMN} = 53{,}5°$ et $\widehat{MSN} = 53{,}5°$. Or, si un triangle a deux angles de même mesure, alors il est isocèle. Son sommet principal est le sommet du troisième angle.
Donc SMN est isocèle de sommet principal N.
Vérification : $180° - 2 \times 53{,}5° = 73°$, c'est bien $\widehat{SNM}$.

Ex. 34 ★★★ **L'étagère de Chloé : parallèles ou pas ?**

(a) On sait que, avec la sécante (IK), les angles $\widehat{AIJ}$ et $\widehat{DJI}$ sont alternes-internes. On sait aussi qu'ils ont la même mesure : 112°. Or, si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes de même mesure, alors ces droites sont parallèles.
Donc (AI) et (CD) sont parallèles.

(b) On sait que C, J et D sont alignés : les angles $\widehat{CJI}$ et $\widehat{IJD}$ sont adjacents et forment l'angle plat $\widehat{CJD}$. Or, deux angles qui forment un angle plat sont supplémentaires.
Donc $\widehat{CJI} = 180° - 112° = 68°$.

(c) Non. On sait que, avec la sécante (IK), les angles $\widehat{CJI}$ et $\widehat{EKJ}$ sont correspondants. On sait aussi que $\widehat{CJI} = 68°$ et $\widehat{EKJ} = 70°$: leurs mesures sont différentes. Or, si deux droites coupées par une sécante forment deux angles correspondants de mesures différentes, alors ces droites ne sont pas parallèles.
Donc (CD) et (EK) ne sont pas parallèles.

(d) Non. La figure n'est pas à l'échelle : on ne prouve pas un parallélisme à vue. On sait que (AI) et (CD) sont parallèles. Si (EK) était parallèle à (AI), alors (CD) et (EK) seraient parallèles. En effet, deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles. Or on a démontré que (CD) et (EK) ne sont pas parallèles.
Donc (AI) et (EK) ne sont pas parallèles.

Ex. 35 ★★★ **Plan de ville : corriger la copie d'Inès**

(a) On sait que P, L et M sont alignés : les angles $\widehat{PLS}$ et $\widehat{SLM}$ sont adjacents et forment l'angle plat $\widehat{PLM}$. Or, deux angles qui forment un angle plat sont supplémentaires.
Donc $\widehat{SLM} = 180° - 138{,}5° = 41{,}5°$.

(b) Inès se trompe : $\widehat{RLP}$ et $\widehat{SLM}$ ne sont pas adjacents. On sait que [LR) et [LS) sont opposées, ainsi que [LP) et [LM) : les angles $\widehat{RLP}$ et $\widehat{SLM}$ sont opposés par le sommet. Or, deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
Donc $\widehat{RLP} = \widehat{SLM} = 41{,}5°$.

Ex. 35 **(suite)**

(c) $\widehat{LMV}$ et $\widehat{SLM}$ sont tous les deux au-dessus de la sécante (PQ), donc du même côté : ils ne sont pas alternes-internes. On sait que (RS) et (UV) sont parallèles. On sait aussi que, avec la sécante (PQ), les angles $\widehat{PLS}$ et $\widehat{LMV}$ sont correspondants. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles correspondants ont la même mesure.
Donc $\widehat{LMV} = 138{,}5°$.

(d) On sait que les angles $\widehat{UMQ}$ et $\widehat{LMV}$ sont opposés par le sommet. Or, deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
Donc $\widehat{UMQ} = 138{,}5°$. On sait aussi que L, M et Q sont alignés : les angles $\widehat{LMU}$ et $\widehat{UMQ}$ sont adjacents et forment l'angle plat $\widehat{LMQ}$. Or, deux angles qui forment un angle plat sont supplémentaires.
Donc $\widehat{LMU} = 180° - 138{,}5° = 41{,}5°$.

6. *Démontrer que deux droites sont parallèles*

Ex. 36 ★☆☆ **Parallèles, pas parallèles, ou on ne sait pas ?**

(a) Oui. Les deux angles alternes-internes ont la même mesure. Or, si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes de même mesure, alors elles sont parallèles.
Donc $(d_1) \parallel (d_2)$.

(b) Elles ne sont pas parallèles. Si elles l'étaient, les angles correspondants auraient la même mesure. Or $112° \neq 113°$, donc (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

(c) On ne peut rien conclure. Deux angles opposés par le sommet ont toujours la même mesure, que les droites soient parallèles ou non.

(d) Non. Elles ne sont pas parallèles : $71° + 109° = 180°$, mais ces angles alternes-internes n'ont pas la même mesure ($71° \neq 109°$). Avec des parallèles, ils seraient égaux. Être supplémentaires ne suffit pas.

(e) Zoé a cité la propriété directe, celle qui sert à calculer. Pour démontrer un parallélisme, il faut la réciproque : « Or, si deux droites coupées par une sécante forment deux angles correspondants de même mesure, alors ces droites sont parallèles. »

Ex. 37 ★☆☆ **Choisir la bonne paire d'angles**

(a) Ils sont alternes-internes : ils sont entre les deux droites et de part et d'autre de la sécante. On sait qu'ils mesurent tous les deux 116,5°. Or, si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes de même mesure, alors elles sont parallèles.
Donc $(AB) \parallel (CD)$.

(b) $\widehat{CFH}$: en F, il est du côté de H par rapport à (CD) et du côté de C par rapport à la sécante. $\widehat{BEF}$ occupe la même position en E : du côté de F par rapport à (AB), du côté de B par rapport à la sécante.

(c) $\widehat{EFD}$: il est entre les deux droites, de l'autre côté de la sécante.

(d) Non. Ils sont bien entre les deux droites, mais du même côté de la sécante (celui de A et de D). Ils ne sont ni alternes-internes ni correspondants : leur égalité ne permettrait pas de conclure.

Ex. 38 ★★☆ **Plan de ville : deux rues parallèles ?**

(a) Les points G, E et F sont alignés, donc $\widehat{GEB}$ et $\widehat{BEF}$ sont adjacents et supplémentaires : $\widehat{BEF} = 180° - 123{,}5° = 56{,}5°$.

(b) On sait que $\widehat{BEF} = 56{,}5°$ et $\widehat{CFE} = 56{,}5°$, et que ces angles sont alternes-internes pour les droites (AB) et (CD) coupées par la sécante (GH). Or, si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes de même mesure, alors elles sont parallèles.
Donc $(AB) \parallel (CD)$.

(c) Non. Sa conclusion est juste, mais sa justification est fausse : $123{,}5° + 56{,}5° = 180°$, mais aucune propriété ne dit que deux angles supplémentaires prouvent un parallélisme. Par exemple, $\widehat{GEB}$ et $\widehat{BEF}$ sont toujours supplémentaires, quelles que soient les droites. Il faut deux angles alternes-internes (ou correspondants) égaux.

Ex. 39 ★★☆ **L'étagère de Nadia**

(a) On sait que $\widehat{RKN}$ et $\widehat{MKL}$ sont opposés par le sommet K. Or, deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
Donc $\widehat{MKL} = 76°$.

(b) On sait que $\widehat{MKL} = 76°$ et $\widehat{KLQ} = 79°$ sont alternes-internes pour les droites (MN) et (PQ) coupées par la sécante (RS). Or, si ces droites étaient parallèles, alors ces angles alternes-internes auraient la même mesure. Comme $76° \neq 79°$, (MN) et (PQ) ne sont pas parallèles, même si elles en ont l'air sur le dessin.

Ex. 39 **(suite)**

(c) $\widehat{RKN}$ et $\widehat{MKL}$ sont opposés par le sommet : ils sont toujours égaux, que les planches soient parallèles ou non. Leur égalité ne prouve rien. Il faut comparer deux angles alternes-internes (ou correspondants), et ici ils sont différents.

Ex. 40 ★★★ **L'échelle aux trois barreaux**

(a) Les points A, K et B sont alignés, donc $\widehat{AKB}$ est un angle plat. Les angles $\widehat{AKL}$ et $\widehat{BKL}$ sont adjacents et supplémentaires : $\widehat{AKL} = 180° - 115{,}5° = 64{,}5°$.

(b) On sait que les angles $\widehat{AKL}$ et $\widehat{KLD}$ sont alternes-internes, formés par les droites (AB) et (CD) et la sécante (KM), et qu'ils mesurent tous les deux 64,5°.
Or, si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes de même mesure, alors ces droites sont parallèles.
Donc $(AB) \parallel (CD)$.

(c) Les points C, L et D sont alignés, donc $\widehat{KLC}$ et $\widehat{KLD}$ sont supplémentaires : $\widehat{KLC} = 180° - 64{,}5° = 115{,}5°$.

(d) On sait que les angles $\widehat{KLC}$ et $\widehat{LME}$ sont correspondants, formés par les droites (CD) et (EM) et la sécante (KM), et que $\widehat{KLC} = 115{,}5°$ et $\widehat{LME} = 114°$: leurs mesures sont différentes. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles correspondants ont la même mesure.
Donc les droites (CD) et (EM) ne sont pas parallèles : si elles l'étaient, ces deux angles seraient égaux.

(e) Non. Une figure ne prouve rien, et celle-ci n'est pas à l'échelle. Comme L est sur [KM], $\widehat{BKL}$ est aussi l'angle $\widehat{BKM}$, et $\widehat{LME}$ est aussi l'angle $\widehat{KME}$. On sait que $\widehat{BKM}$ et $\widehat{KME}$ sont alternes-internes, formés par (AB) et (EM) et la sécante (KM), et que $115{,}5° \neq 114°$. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure.
Donc (AB) et (EM) ne sont pas parallèles.

Ex. 41 ★★★ **Trois élèves, trois erreurs**

(a) On sait que les angles $\widehat{GEB}$ et $\widehat{AEF}$ sont opposés par le sommet E. Or, si deux angles sont opposés par le sommet, alors ils ont la même mesure.
Donc $\widehat{AEF} = 87{,}5°$.

Ex. 41 **(suite)**

(b) Son calcul est juste, car C, F et D sont alignés. Mais $\widehat{GEB}$ et $\widehat{EFC}$ ne sont ni alternes-internes ni correspondants. $\widehat{GEB}$ est en dehors des deux droites, du côté de B. $\widehat{EFC}$ est entre les deux droites, du côté de C. La réciproque ne s'applique pas : cette égalité ne prouve rien.

(c) Cette propriété (propriété directe) ne s'utilise que si l'on SAIT déjà que les droites sont parallèles. Or l'énoncé ne dit pas que $(AB) \parallel (CD)$: c'est justement la question. D'ailleurs l'énoncé donne $\widehat{EFD} = 92{,}5°$, pas 87,5°.

(d) Non. Leur somme fait bien $87{,}5° + 92{,}5° = 180°$, mais la réciproque exige deux angles correspondants ÉGAUX. On sait que $\widehat{GEB}$ et $\widehat{EFD}$ sont correspondants et que $87{,}5° \neq 92{,}5°$. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles correspondants ont la même mesure.
Donc (AB) et (CD) ne sont pas parallèles, même si elles en ont l'air sur la figure.

(e) Les points A, E et B sont alignés, donc $\widehat{BEF} = 180° - 87{,}5° = 92{,}5°$. Les angles $\widehat{BEF}$ et $\widehat{EFC}$ sont alternes-internes. Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes de même mesure, alors elles sont parallèles. Il faudrait donc $\widehat{EFC} = 92{,}5°$. (Ici, $\widehat{EFC} = 180° - 92{,}5° = 87{,}5°$.)

Ex. 42 ★★★ **La traverse du pont**

(a) Les angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{ACB}$ ne sont ni alternes-internes ni correspondants : le premier est formé avec la sécante (AB), le second avec la sécante (AC). La réciproque ne s'applique qu'à deux angles formés par une MÊME sécante.

(b) On sait que la somme des angles d'un triangle vaut 180°. Dans le triangle ABC : $\widehat{ABC} = 180° - (44° + 68°) = 68°$.

(c) On sait que les angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{ABC}$ sont correspondants, formés par les droites (DE) et (BC) et la sécante (AB), et qu'ils mesurent tous les deux 68°.
Or, si deux droites coupées par une sécante forment deux angles correspondants de même mesure, alors ces droites sont parallèles.
Donc $(DE) \parallel (BC)$.

Ex. 42 **(suite)**

(d) On sait que $(DE) \parallel (BC)$ et que $\widehat{AED}$ et $\widehat{ACB}$ sont correspondants, avec la sécante (AC). Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles correspondants ont la même mesure.
Donc $\widehat{AED} = 68°$. Les points A, E et C sont alignés, donc $\widehat{DEC} = 180° - 68° = 112°$.

(e) Oui. Dans le triangle ADE : $\widehat{AED} = 180° - (44° + 68°) = 68°$ (on le retrouve aussi à la question précédente). On sait que $\widehat{ADE} = \widehat{AED} = 68°$. Or, si un triangle a deux angles de même mesure, alors il est isocèle.
Donc le triangle ADE est isocèle en A.

7. *Problèmes de calcul d'angles*

Ex. 43 ★☆☆ **Les angles des triangles particuliers**

(a) Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.
Donc $\widehat{STR} = 90° - 37{,}5° = 52{,}5°$.

(b) Le triangle UVW est isocèle en U, donc ses angles à la base sont égaux : $\widehat{UVW} = \widehat{UWV}$. La somme des angles d'un triangle vaut 180°, donc $\widehat{UVW} = (180° - 38°) \div 2 = 71°$.

(c) PQK est isocèle en P, donc $\widehat{PKQ} = \widehat{PQK} = 64°$. La somme des angles d'un triangle vaut 180°, donc $\widehat{QPK} = 180° - 2 \times 64° = 52°$.

(d) Dans un triangle équilatéral, les trois angles sont égaux et leur somme vaut 180°.
Donc $\widehat{FGE} = 180° \div 3 = 60°$.

(e) Non. Ces deux angles donnent déjà $125° + 75° = 200°$, soit plus de 180°. Or la somme des trois angles d'un triangle vaut 180°. Ce triangle ne peut donc pas exister.

Ex. 44 ★☆☆ **Un angle connu, des droites parallèles… ou pas**

(a) C'est l'angle $\widehat{EFD}$. On sait que (AB) et (CD) sont parallèles et que $\widehat{AEF}$ et $\widehat{EFD}$ sont alternes-internes. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure.
Donc $\widehat{EFD} = 57°$.

(b) On sait que (AB) et (CD) sont parallèles et que $\widehat{AEF}$ et $\widehat{CFM}$ sont correspondants. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles correspondants ont la même mesure.
Donc $\widehat{CFM} = 57°$.

Ex. 44 **(suite)**

(c) Les angles $\widehat{AEF}$ et $\widehat{BEF}$ sont adjacents et forment l'angle plat $\widehat{AEB}$. Ils sont donc supplémentaires : $\widehat{BEF} = 180° - 57° = 123°$. C'est un angle obtus.

(d) Non. Les angles $\widehat{LMF}$ et $\widehat{AEF}$ sont bien alternes-internes, mais rien ne dit que (LM) et (AB) sont parallèles. Le fait qu'elles semblent parallèles sur le dessin ne prouve rien, car la figure n'est pas à l'échelle. On ne peut donc pas affirmer que $\widehat{LMF}$ mesure 57°.

Ex. 45 ★★☆ **Le chemin en zigzag entre deux rues**

(a) On sait que (MP) et (AB) sont parallèles, et que (AB) et (CD) sont parallèles. Or, si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
Donc (MP) et (CD) sont parallèles.

(b) On sait que (MP) et (AB) sont parallèles et que $\widehat{BEM}$ et $\widehat{EMP}$ sont alternes-internes (la sécante est (EM)). Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure.
Donc $\widehat{EMP} = 32°$.

(c) On sait que (MP) et (CD) sont parallèles (question précédente) et que $\widehat{DFM}$ et $\widehat{PMF}$ sont alternes-internes (la sécante est (MF)). Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure.
Donc $\widehat{PMF} = 46°$.

(d) Les angles $\widehat{EMP}$ et $\widehat{PMF}$ sont adjacents, donc $\widehat{EMF} = 32° + 46° = 78°$. On remarque que l'angle du milieu est égal à la somme des deux autres angles.

Ex. 46 ★★☆ **Pourquoi la somme fait 180°**

(a) On sait que (UV) et (RS) sont parallèles et que $\widehat{UTR}$ et $\widehat{TRS}$ sont alternes-internes (la sécante est (RT)). Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure.
Donc $\widehat{UTR} = 41°$.

(b) On sait que (UV) et (RS) sont parallèles et que $\widehat{VTS}$ et $\widehat{RST}$ sont alternes-internes (la sécante est (ST)). Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure.
Donc $\widehat{VTS} = 33°$.

(c) Ces trois angles forment un angle plat, donc leur somme vaut 180°. On calcule : $\widehat{RTS} = 180° - (41° + 33°) = 106°$.

Ex. 46 **(suite)**

(d) On obtient $41° + 33° + 106° = 180°$. Dans n'importe quel triangle, la parallèle à un côté qui passe par le sommet opposé reporte les deux autres angles (ils sont alternes-internes). Les trois angles du triangle forment alors un angle plat, donc leur somme vaut toujours 180°.

Ex. 47 ★★★ **La ferme de la charpente**

(a) On sait que le triangle ABC est isocèle en A. Or, dans un triangle isocèle, les angles à la base ont la même mesure.
Donc $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 34°$.

(b) On sait que les angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{ABC}$ sont correspondants, formés par les droites (DE) et (BC) et la sécante (AB), et qu'ils mesurent tous les deux 34°.
Or, si deux angles correspondants ont la même mesure, alors les droites sont parallèles.
Donc (DE) et (BC) sont parallèles.
(Ici, on utilise la réciproque, pas la propriété directe.)

(c) On sait que la somme des angles d'un triangle vaut 180°.
Donc $\widehat{BAC} = 180° - (34° + 34°) = 112°$.

(d) On sait que les droites (DE) et (BC) sont parallèles (question 2) et que les angles $\widehat{DEF}$ et $\widehat{EFC}$ sont alternes-internes (sécante (EF)). Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure.
Donc $\widehat{DEF} = 75°$.

(e) On sait que, dans le triangle EFC, $\widehat{EFC} = 75°$ et $\widehat{ECF} = \widehat{ACB} = 34°$. Or, la somme des angles d'un triangle vaut 180°.
Donc $\widehat{FEC} = 180° - (75° + 34°) = 71°$. Vérification : $\widehat{AED} = \widehat{ACB} = 34°$ (angles correspondants, car (DE) et (BC) sont parallèles), et $34° + 75° + 71° = 180°$ (angle plat $\widehat{AEC}$).

Ex. 48 ★★★ **Le support de l'étagère**

(a) On sait que les angles $\widehat{VRS}$ et $\widehat{URS}$ sont adjacents et forment l'angle plat $\widehat{URV}$. Ils sont donc supplémentaires.
Donc $\widehat{VRS} = 180° - 63° = 117°$.

Ex. 48 **(suite)**

(b) On sait que les angles $\widehat{VRS}$ et $\widehat{RUT}$ sont correspondants, formés par les droites (RS) et (UT) et la sécante (UV), et qu'ils mesurent tous les deux 117°.
Or, si deux angles correspondants ont la même mesure, alors les droites sont parallèles.
Donc (RS) et (UT) sont parallèles.

(c) On sait que les droites (RS) et (UT) sont parallèles et que les angles $\widehat{SRT}$ et $\widehat{RTU}$ sont alternes-internes (sécante (RT)). Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure.
Donc $\widehat{RTU} = 38°$.

(d) Les angles $\widehat{RTU}$ et $\widehat{RTS}$ sont adjacents et forment ensemble l'angle $\widehat{UTS}$.
Donc $\widehat{RTS} = 104° - 38° = 66°$.

(e) Un angle de triangle mesure toujours moins de 180°, puisque la somme des trois angles vaut 180°. Un angle de 208° est donc impossible. Inès a oublié les parenthèses. Dans le triangle RST, la somme des angles vaut 180°, donc $\widehat{RST} = 180° - (38° + 66°) = 76°$.

Ex. 49 ★★★ **Deux échelles contre le mur**

(a) On sait que le triangle ABH est rectangle en H. Or, dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.
Donc $\widehat{ABH} = 90° - 72{,}5° = 17{,}5°$.

(b) On sait que le triangle CDH est rectangle en H. Or, dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.
Donc $\widehat{DCH} = 90° - 18° = 72°$.

(c) Non. On sait que les angles $\widehat{BAH}$ et $\widehat{DCH}$ sont correspondants, formés par les droites (AB) et (CD) et la sécante (CH). Ils mesurent $72{,}5^\circ$ et 72°. Or, si deux droites sont parallèles, alors les angles correspondants ont la même mesure. Ici, les mesures sont différentes.
Donc (AB) et (CD) ne sont pas parallèles. Le dessin ne suffit pas à prouver un parallélisme.

(d) Il faut que les angles correspondants $\widehat{DCH}$ et $\widehat{BAH}$ aient la même mesure : $\widehat{DCH} = 72{,}5°$. En effet, si deux angles correspondants ont la même mesure, alors les droites sont parallèles. Le triangle CDH est rectangle en H, donc ses angles aigus sont complémentaires : $\widehat{CDH} = 90° - 72{,}5° = 17{,}5°$.