Corrigé – Brevet 2024 – mathématiques – Pays du groupe 1

QCM : écriture scientifique, vitesse, probabilité, statistiques, fractions, Circuits d'entraînement : décomposition en facteurs premiers et multiples communs, Programme de calcul, script et fonction du second degré, Réciproque de Pythagore, trigonométrie, Thalès et homothétie, Chapeau de sorcier : cône, patron, proportionnalité et réduction

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – QCM : écriture scientifique, vitesse, probabilité, statistiques, fractions *(20 pts)*

1. Réponse : $1{,}93 \times 10^{-101}$. L'écriture scientifique s'écrit $a \times 10^n$ où a est un décimal compris entre 1 (inclus) et 10 (exclu) et n un entier relatif. Or $0{,}193 = 1{,}93 \times 10^{-1}$, donc $0{,}193 \times 10^{-100} = 1{,}93 \times 10^{-1} \times 10^{-100} = 1{,}93 \times 10^{-1+(-100)} = 1{,}93 \times 10^{-101}$. Les réponses $193 \times 10^{\cdots}$ ne sont pas des écritures scientifiques (193 n'est pas compris entre 1 et 10).

2. Réponse : 84,2. On convertit la durée en heures : $42 \text{ min} = \dfrac{42}{60} \text{ h} = 0{,}7 \text{ h}$, donc $5 \text{ h } 42 \text{ min} = 5{,}7 \text{ h}$. La vitesse moyenne est $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{480}{5{,}7} \approx 84{,}21 \text{ km/h}$, soit environ 84,2 km/h au dixième. Vérification : $84{,}2 \times 5{,}7 = 479{,}94 \approx 480$.

> ⚠ **Piège.** 5 h 42 min ne vaut pas 5,42 h : une heure compte 60 minutes, pas 100. Le distracteur 88,6 correspond exactement à l'erreur $480 \div 5{,}42$.

3. Réponse : « Oui, en écrivant le nombre 2 ». On compte sur la roue 15 secteurs : 8 portent le nombre 2, 6 portent le nombre 1 et 1 secteur est effacé. Les secteurs étant équiprobables, on veut $\dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{15}$, c'est-à-dire 9 secteurs « 2 » sur 15. En écrivant 2 dans le secteur effacé, on obtient 9 secteurs « 2 » sur 15, donc une probabilité de $\dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$. (En écrivant 1 ou en laissant le secteur vide, on n'aurait que 8 secteurs « 2 » sur 15, soit $\dfrac{8}{15} \neq \dfrac{3}{5}$.)

4. Réponse : « Rien de particulier ». La liste rangée dans l'ordre croissant est 1 ; 3 ; 5 ; 10 ; 10 ; 11 ; 17 (7 valeurs). La médiane est la 4^{e} valeur : 10. L'étendue vaut $17 - 1 = 16$. La moyenne vaut $\dfrac{5+1+3+10+17+11+10}{7} = \dfrac{57}{7} \approx 8{,}14$. Le nombre 5 n'est donc ni la médiane, ni l'étendue, ni la moyenne.

5. Réponse : $\dfrac{4}{15}$. Après la réservation, il reste à payer $1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$ du prix. Ce reste est partagé en trois paiements égaux : $\dfrac{4}{5} \div 3 = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{15}$. Vérification : $\dfrac{1}{5} + 3 \times \dfrac{4}{15} = \dfrac{3}{15} + \dfrac{12}{15} = 1$.

Exercice 2 – Circuits d'entraînement : décomposition en facteurs premiers et multiples communs *(20 pts)*

1. Un tour de circuit comprend chaque exercice suivi de son temps de repos (le dernier repos permet de revenir à l'exercice 1).
Circuit 1 : 5 exercices de $40 + 16 = 56$ s, soit $5 \times 56 = 280$ s.
Circuit 2 : 10 exercices de $30 + 5 = 35$ s, soit $10 \times 35 = 350$ s.
Le circuit 1 s'effectue bien en 280 secondes et le circuit 2 en 350 secondes.

2. On divise successivement par les nombres premiers 2, 3, 5, 7…
$280 = 2 \times 140 = 2 \times 2 \times 70 = 2 \times 2 \times 2 \times 35 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7$, donc $280 = 2^3 \times 5 \times 7$.
$350 = 2 \times 175 = 2 \times 5 \times 35 = 2 \times 5 \times 5 \times 7$, donc $350 = 2 \times 5^2 \times 7$.
Vérification : $8 \times 5 \times 7 = 280$ et $2 \times 25 \times 7 = 350$.

3. a) $2\,800 = 280 \times 10$: 2 800 est un multiple de 280. En 2 800 s, Camille a donc effectué exactement 10 tours du circuit 1. **Elle se trouve de nouveau au départ du circuit 1.**
Pour Dominique : $2\,800 \div 350 = 8$, donc $2\,800 = 350 \times 8$. En 2 800 s, Dominique a effectué exactement 8 tours du circuit 2. **Dominique se trouve lui aussi au départ (exercice 1) du circuit 2.**

3. b) Camille est au départ aux instants multiples de 280 s, Dominique aux instants multiples de 350 s. Ils se retrouvent ensemble au départ pour la première fois au plus petit multiple commun non nul de 280 et 350.
D'après les décompositions de la question 2, on prend chaque facteur premier avec son plus grand exposant : $2^3 \times 5^2 \times 7 = 8 \times 25 \times 7 = 1\,400$.
Vérification : $1\,400 = 280 \times 5$ (5 tours pour Camille) et $1\,400 = 350 \times 4$ (4 tours pour Dominique) ; les multiples de 350 inférieurs (350, 700, 1 050) ne sont pas des multiples de 280.
Enfin $1\,400 = 23 \times 60 + 20$. **Ils se retrouvent pour la première fois ensemble au départ au bout de 1 400 s, soit 23 min 20 s.**

> 💡 **Astuce.** « Se retrouver en même temps au départ pour la première fois » signifie chercher le plus petit multiple commun. Si tu hésites, écris la liste des multiples du plus grand nombre (350 ; 700 ; 1 050 ; 1 400…) et arrête-toi au premier qui est aussi divisible par l'autre.

Exercice 3 – Programme de calcul, script et fonction du second degré *(20 pts)*

Partie A

1. Avec 5 : d'un côté $5 - 2 = 3$, de l'autre $5 + 1 = 6$; on multiplie les deux résultats : $3 \times 6 = 18$. **Le résultat final est bien 18.**

2. Avec $-\dfrac{3}{2}$:
– soustraire 2 : $-\dfrac{3}{2} - 2 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{2} = -\dfrac{7}{2}$;
– ajouter 1 : $-\dfrac{3}{2} + 1 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{2} = -\dfrac{1}{2}$;
– produit : $\left(-\dfrac{7}{2}\right) \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{4}$ (le produit de deux nombres négatifs est positif).
Le résultat final est $\dfrac{7}{4}$, soit 1,75. Vérification en écriture décimale : $(-1{,}5 - 2) \times (-1{,}5 + 1) = (-3{,}5) \times (-0{,}5) = 1{,}75$.

3. Script complété sur l'annexe :
– ligne 3 : **mettre a à (réponse) − (2)** ;
– ligne 4 : **mettre b à (réponse) + (1)** ;
– ligne 5 : **dire (a) * (b) pendant 2 secondes**.
La variable a contient le nombre choisi diminué de 2, la variable b le nombre choisi augmenté de 1, et le programme affiche leur produit.

Partie B

1. On développe par double distributivité : $(x - 2)(x + 1) = x \times x + x \times 1 - 2 \times x - 2 \times 1 = x^2 + x - 2x - 2 = x^2 - x - 2$. **On a bien $(x - 2)(x + 1) = x^2 - x - 2$.**

2. a) $(x - 2)(x + 1) = 0$ est une équation produit nul. **Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul** : $x - 2 = 0$ ou $x + 1 = 0$, c'est-à-dire $x = 2$ ou $x = -1$. **L'équation a deux solutions : -1 et 2.**

> ⚠ **Piège.** N'essaie pas de résoudre $x^2 - x - 2 = 0$ sous forme développée : au collège, seule la forme factorisée permet de conclure, grâce à la propriété du produit nul. Et n'oublie pas la deuxième solution.

2. b) D'après la question 1, $g(x) = (x-2)(x+1)$, donc $g(x) = 0$ a les mêmes solutions que l'équation de la question 2. a). **Les antécédents de 0 par la fonction g sont -1 et 2.**

3. C'est le graphique 3. (Pour s'en convaincre : g n'est pas une fonction affine, sa courbe n'est donc pas une droite, ce qui élimine les graphiques 1 et 2 ; de plus la courbe du graphique 3 coupe l'axe des abscisses en -1 et 2 et passe par le point de coordonnées $(0 ; -2)$, et l'on a bien $g(0) = -2$.)

4. Si l'on choisit x au départ, le programme calcule $(x-2)$ et $(x+1)$, puis leur produit : le résultat final est $(x-2)(x+1) = g(x)$. Obtenir 0 revient donc à résoudre $(x-2)(x+1) = 0$, déjà résolue à la question 2. a). Vérification : avec 2, $(2-2) \times (2+1) = 0 \times 3 = 0$; avec -1, $(-1-2) \times (-1+1) = (-3) \times 0 = 0$. **Il faut choisir -1 ou 2 comme nombre de départ.**

Exercice 4 – Réciproque de Pythagore, trigonométrie, Thalès et homothétie *(16 pts)*

1. Dans le triangle ABE, le plus long côté est [AB].
D'une part : $AB^2 = 5{,}5^2 = 30{,}25$.
D'autre part : $AE^2 + EB^2 = 4{,}4^2 + 3{,}3^2 = 19{,}36 + 10{,}89 = 30{,}25$.
On constate que $AB^2 = AE^2 + EB^2$. D'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, **le triangle ABE est rectangle en E.**

2. Dans le triangle ABE rectangle en E, pour l'angle $\widehat{ABE}$, le côté adjacent est [EB] et l'hypoténuse est [AB].
On utilise le **cosinus** : $\cos \widehat{ABE} = \dfrac{EB}{AB} = \dfrac{3{,}3}{5{,}5} = 0{,}6$. À la calculatrice, $\widehat{ABE} = \arccos(0{,}6) \approx 53{,}13°$. **L'angle $\widehat{ABE}$ mesure environ $53°$ (arrondi au degré).** Contrôle avec la tangente : $\tan \widehat{ABE} = \dfrac{AE}{EB} = \dfrac{4{,}4}{3{,}3} \approx 1{,}333$, ce qui donne aussi environ $53{,}13°$.

3. Les points E, B, D sont alignés dans cet ordre, donc $ED = EB + BD = 3{,}3 + 6{,}6 = 9{,}9$ cm.
Les points E, A, F d'une part et E, B, D d'autre part sont alignés, et les droites (AB) et (FD) sont parallèles.
D'après le **théorème de Thalès** : $\dfrac{EA}{EF} = \dfrac{EB}{ED} = \dfrac{AB}{FD}$.
Avec $\dfrac{EB}{ED} = \dfrac{AB}{FD}$: $\dfrac{3{,}3}{9{,}9} = \dfrac{5{,}5}{FD}$, donc $FD = \dfrac{5{,}5 \times 9{,}9}{3{,}3} = 5{,}5 \times 3 = 16{,}5$.
La longueur FD est égale à 16,5 cm.

> ⚠ **Piège.** Dans le rapport de Thalès, il faut la longueur ED entière (9,9 cm), pas BD (6,6 cm) : les longueurs se mesurent toujours depuis le point commun E.

4. Le rapport est $\dfrac{ED}{EB} = \dfrac{9{,}9}{3{,}3} = 3$ (et les images sont du même côté de E que les points de départ, le rapport est positif). **L'homothétie de centre E a pour rapport 3.**

Exercice 5 – Chapeau de sorcier : cône, patron, proportionnalité et réduction *(24 pts)*

Partie A

1. Le segment [OS] est la hauteur du cône, perpendiculaire à la base : le triangle SOM est rectangle en O.
D'après le **théorème de Pythagore** : $MS^2 = OS^2 + OM^2 = 30^2 + 9^2 = 900 + 81 = 981$, donc $MS = \sqrt{981} \approx 31{,}32$. **La longueur MS, arrondie au dixième, est bien 31,3 cm.**

2. Le tour de la base du chapeau est la longueur du cercle de rayon OM = 9 cm : $2 \times \pi \times 9 = 18\pi \approx 56{,}55$ cm. Comme 56,55 cm est un peu plus grand que 56 cm (tour de tête de Léo), le chapeau entre sur sa tête sans être trop large (environ 0,5 cm de marge). **Les dimensions choisies sont adaptées au tour de tête de Léo.**

3. a) On utilise le rayon SM = 31,3 cm reporté sur le patron. Longueur du cercle de centre S et de rayon SM : $2 \times \pi \times 31{,}3 = 62{,}6\pi \approx 196{,}66$ cm. **Arrondie au dixième, elle est bien égale à 196,7 cm.**

3. b) Tableau de l'annexe complété (un tour complet de 360° correspond au cercle entier) :

Mesure de l'angle (en degré)	**360**	**……**
Longueur de l'arc (en centimètre)	**196,7**	56,5

3. c) L'angle est proportionnel à la longueur de l'arc. Par produit en croix : $\text{angle} = \dfrac{360 \times 56{,}5}{196{,}7} = \dfrac{20\,340}{196{,}7} \approx 103{,}4°$. Vérification : $196{,}7 \times 103{,}4 \approx 20\,338$, proche de 20 340. **L'angle $\widehat{M'SM}$ mesure environ 103° (arrondi au degré).**

> **Astuce.** Dans un tableau de proportionnalité, la « quatrième proportionnelle » se calcule en multipliant les deux nombres placés en diagonale puis en divisant par le troisième : $\dfrac{360 \times 56{,}5}{196{,}7}$.

Partie B

1. Le chapeau est un cône de rayon R = 9 cm et de hauteur h = 30 cm : $V = \dfrac{1}{3} \times \pi \times 9^2 \times 30 = \dfrac{1}{3} \times \pi \times 81 \times 30 = 810\pi \approx 2\,544{,}7$ cm³. **Le volume total du chapeau, arrondi au cm³, est bien de 2 545 cm³.**

2. Les bonbons occupent la pointe du chapeau, jusqu'à la moitié de la hauteur : ils remplissent un petit cône de hauteur 15 cm, qui est une **réduction** du grand cône de rapport $k = \dfrac{15}{30} = \dfrac{1}{2}$.
Dans une réduction de rapport k, les volumes sont multipliés par k^3 : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$. Le volume des bonbons vaut donc $\dfrac{810\pi}{8} = 101{,}25\pi \approx 318{,}1$ cm³, soit 12,5 % du volume total.
Contrôle direct : le petit cône a pour rayon $9 \times \dfrac{1}{2} = 4{,}5$ cm, d'où $V' = \dfrac{1}{3} \times \pi \times 4{,}5^2 \times 15 = 101{,}25\pi \approx 318{,}1$ cm³ ; et 15 % de 2 545 cm³ valent $0{,}15 \times 2\,545 \approx 381{,}8$ cm³.
Comme 12,5 % < 15 % (318,1 cm³ < 381,8 cm³), **l'estimation de Léo est correcte : les bonbons occupent moins de 15 % du volume du chapeau.**

Conseils pour le jour J

Ce sujet de 2 h est accessible mais piégeux sur les conversions et les demi-réponses. Au QCM, pose chaque calcul au brouillon : 5 h 42 min vaut 5,7 h (et non 5,42 h), et à la roue compte les secteurs un par un, y compris celui qui est effacé. N'oublie pas l'annexe (script de l'exercice 3 et tableau de l'exercice 5) : elle est à rendre avec la copie et rapporte des points faciles.

Beaucoup de questions demandent de « montrer » un résultat déjà donné (280 s, 18, 31,3 cm, 196,7 cm, 2 545 cm³) : le résultat seul ne rapporte rien, c'est le calcul posé et la phrase de conclusion qui sont notés. À l'exercice 2, remarque que 2 800 est aussi un multiple de 350 : Dominique est lui aussi au départ, et la première rencontre (1 400 s) s'obtient avec le plus petit multiple commun, à convertir en 23 min 20 s.

À l'exercice 4, nomme bien la réciproque de Pythagore (question 1), puis le théorème de Thalès avec ED = 9,9 cm (question 3). À la partie B de l'exercice 5, le réflexe « réduction de rapport $\dfrac{1}{2}$, volume divisé par 8 » donne la réponse en une ligne ; le calcul direct avec un rayon de 4,5 cm est une bonne vérification.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).