Corrigé – Brevet 2023 – mathématiques – Amérique du Nord

Cinq situations indépendantes : arithmétique, probabilités, calcul littéral, Triangles rectangles semblables et trigonométrie, Statistiques de fréquentation touristique et prix hôteliers, Programme de construction d'un motif floral, Périmètre, vitesse et coût d'entretien d'un hippodrome

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Cinq situations indépendantes : arithmétique, probabilités, calcul littéral *(20 pts)*

Situation 1. $780 = 2 \times 390 = 2 \times 2 \times 195 = 2^2 \times 3 \times 65 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$. $780 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$**.**

Situation 2. a) Le 8 de pique est une carte parmi 32 cartes équiprobables : **la probabilité est** $\dfrac{1}{32}$**.**

Situation 2. b) Il y a 4 rois et 8 cœurs, mais le roi de cœur est compté deux fois : $4 + 8 - 1 = 11$ cartes favorables. **La probabilité d'obtenir un roi ou un cœur est** $\dfrac{11}{32}$**.**

Situation 3. Par double distributivité : $A = 2x \times 3x - 2x \times 4 + 5 \times 3x - 5 \times 4 = 6x^2 - 8x + 15x - 20$. $A = 6x^2 + 7x - 20$**.**

Situation 4. a) La base du prisme droit est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 60 cm et 80 cm (100 cm est l'hypoténuse). Aire de la base $= \dfrac{60 \times 80}{2} = 2\,400$ cm². La hauteur du prisme est 120 cm. Volume = aire de la base × hauteur $= 2\,400 \times 120 = 288\,000$. **Le volume du prisme est** $288\,000$ **cm³.**

Situation 4. b) 1 dm³ $= 1\,000$ cm³, donc $288\,000$ cm³ $= 288$ dm³. Comme 1 L = 1 dm³, **le volume est 288 L.**

Situation 5. Dans un agrandissement de coefficient $k = 3$, les aires sont multipliées par $k^2 = 9$. Aire du polygone $2 = 11 \times 9 = 99$. **L'aire du polygone 2 est 99 cm².**

Exercice 2 – Triangles rectangles semblables et trigonométrie *(22 pts)*

1. Le plus grand côté est [AN]. D'une part $AN^2 = 13^2 = 169$; d'autre part $LN^2 + AL^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Comme $AN^2 = LN^2 + AL^2$, d'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, **le triangle LNA est rectangle en L.**

2. D'après le codage, $(OH) \perp (LN)$; d'après la question 1, $(AL) \perp (LN)$. Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles, donc (OH) // (AL). Les points N, O, L sont alignés, les points N, H, A sont alignés et les droites (NL) et (NA) sont sécantes en N. D'après le **théorème de Thalès** : $\dfrac{NO}{NL} = \dfrac{NH}{NA} = \dfrac{OH}{LA}$, soit $\dfrac{3}{5} = \dfrac{OH}{12}$. D'où $OH = \dfrac{3 \times 12}{5} = 7{,}2$. **OH = 7,2 cm.**

3. Dans le triangle LNA rectangle en L, [LN] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{LNA}$ et [AN] est l'hypoténuse : $\cos \widehat{LNA} = \dfrac{LN}{AN} = \dfrac{5}{13}$. À la calculatrice, $\widehat{LNA} = \arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) \approx 67{,}4°$. **L'angle $\widehat{LNA}$ mesure environ $67°$.** (On peut aussi utiliser $\tan \widehat{LNA} = \dfrac{AL}{LN} = \dfrac{12}{5}$.)

4. Les triangles LNA et ONH ont l'angle $\widehat{N}$ en commun, et ils sont tous les deux rectangles (en L et en O) : ils ont donc deux angles deux à deux de même mesure. **Si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables** : **LNA et ONH sont semblables.** (Le rapport de réduction est $\dfrac{NO}{NL} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$.)

5. a) Aire du triangle LNA (rectangle en L) $= \dfrac{LN \times LA}{2} = \dfrac{5 \times 12}{2} = 30$ cm². Aire du triangle ONH (rectangle en O) $= \dfrac{ON \times OH}{2} = \dfrac{3 \times 7{,}2}{2} = 10{,}8$ cm². Le quadrilatère LOHA est le triangle LNA privé du triangle ONH : aire $= 30 - 10{,}8 = 19{,}2$. **L'aire de LOHA est $19{,}2$ cm².**

5. b) $\dfrac{19{,}2}{30} = 0{,}64$. **L'aire de LOHA représente 64 % (soit $\dfrac{16}{25}$) de l'aire du triangle LNA.** (Cohérent avec la question 4 : le petit triangle occupe $0{,}6^2 = 36$ % de l'aire du grand.)

Exercice 3 – Statistiques de fréquentation touristique et prix hôteliers *(20 pts)*

Partie A

1. a) Par lecture du diagramme, il y a eu **300 000 visiteurs en 2010**.

1. b) La barre la plus haute est celle de **2019** (environ 405 000 visiteurs).

2. Une hausse de 15 % à partir de 187 216 visiteurs donnerait $187\,216 \times 1{,}15 = 215\,298{,}4$, soit environ 215 298 visiteurs. Or il y a eu 219 042 visiteurs en 2021, et $219\,042 > 215\,298$. **L'objectif a été atteint.** (Autre méthode : le taux d'évolution est $\dfrac{219\,042 - 187\,216}{187\,216} = \dfrac{31\,826}{187\,216} \approx 0{,}17$, soit une hausse d'environ 17 %, supérieure à 15 %.)

Partie B

3. Étendue = prix maximal − prix minimal $= 500 - 60 = 440$. **L'étendue des prix est de 440 €.**

4. Effectif total : $1\,200 + 1\,350 + 1\,000 + 1\,100 + 1\,200 + 1\,300 + 900 + 300 = 8\,350$ nuits.
Somme des prix : $60 \times 1\,200 + 80 \times 1\,350 + 85 \times 1\,000 + 90 \times 1\,100 + 110 \times 1\,200 + 120 \times 1\,300 + 350 \times 900 + 500 \times 300$
$= 72\,000 + 108\,000 + 85\,000 + 99\,000 + 132\,000 + 156\,000 + 315\,000 + 150\,000 = 1\,117\,000$.
Moyenne $= \dfrac{1\,117\,000}{8\,350} \approx 133{,}8$. **Le prix moyen d'une nuit est d'environ 134 €.**

5. Les nuits facturées moins de 100 € sont celles à 60, 80, 85 et 90 € : $1\,200 + 1\,350 + 1\,000 + 1\,100 = 4\,650$ nuits. La moitié de l'effectif total est $8\,350 \div 2 = 4\,175$. Comme $4\,650 \geqslant 4\,175$ (cela représente $\dfrac{4\,650}{8\,350} \approx 56$ % des nuits), **l'annonce est vraie : au moins la moitié des nuits est facturée à moins de 100 €.**
(Autrement dit, la médiane des prix est 90 €, inférieure à 100 €.)

Exercice 4 – Programme de construction d'un motif floral *(20 pts)*

1. a) Avec 1 cm pour 5 pas : $KL = 35 \div 5 = 7$ cm et $LM = 20 \div 5 = 4$ cm. Construction : tracer le segment [KL] de 7 cm ; au point L, tracer avec le rapporteur un angle $\widehat{KLM} = 120°$ et placer M à 4 cm de L sur ce côté ; enfin placer N tel que KLMN soit un parallélogramme, c'est-à-dire $NM = KL = 7$ cm et $KN = LM = 4$ cm (au compas : arc de 7 cm de centre M et arc de 4 cm de centre K, N est leur intersection). Vérification : l'angle $\widehat{LMN}$ mesure $60°$ (angles consécutifs d'un parallélogramme supplémentaires).

1. b) Le lutin part de K orienté vers la droite. Il avance de KL = 35 pas ; en L, l'angle intérieur est $120°$, il tourne donc de $180° - 120° = 60°$ vers la gauche ; il avance de LM = 20 pas ; en M, l'angle intérieur est $60°$, il tourne de $180° - 60° = 120°$. Le « répéter 2 fois » trace ensuite les côtés [MN] et [NK].
Ligne 4 : 35 ; ligne 5 : 60 ; ligne 6 : 20 ; ligne 7 : 120.

2. a) Le motif « Fleur » comporte 5 pétales : **ligne 2 : répéter 5 fois.**

2. b) Les 5 pétales sont répartis régulièrement autour du centre, sur un tour complet de $360°$. Entre deux pétales consécutifs, le lutin doit donc tourner de $360° \div 5 = 72°$. C'est pourquoi la ligne 4 contient « tourner de 72 degrés ».

2. c) Le nouveau motif comporte 12 pétales régulièrement répartis. Il faut donc **répéter 12 fois** (ligne 2) et **tourner de** $360° \div 12 = 30$ **degrés** (ligne 4).

Exercice 5 – Périmètre, vitesse et coût d'entretien d'un hippodrome *(18 pts)*

1. Les deux demi-cercles de rayon 40 m forment ensemble un cercle complet de rayon 40 m, de périmètre $2 \times \pi \times 40 = 80\pi \approx 251{,}3$ m. Longueur d'un tour $= 2 \times 850 + 80\pi = 1\,700 + 80\pi \approx 1\,951{,}3$. **Un tour de piste mesure environ 1 951 m.**

2. a) 2 min 9 s $= 2 \times 60 + 9 = 129$ s. Vitesse moyenne $= \dfrac{d}{t} = \dfrac{1\,951}{129} \approx 15{,}1$. **La vitesse moyenne du cheval est d'environ 15 m/s.**

2. b) En 1 h, soit $3\,600$ s, le cheval parcourrait $15 \times 3\,600 = 54\,000$ m $= 54$ km. **Sa vitesse est d'environ 54 km/h** (avec la valeur non arrondie 15,12 m/s, on trouve environ 54,4 km/h).

3. Pour chaque marque, on calcule le nombre de sacs nécessaires (arrondi à l'entier supérieur, car on ne peut acheter que des sacs entiers) puis le coût :
– Marque A : $73\,027 \div 500 \approx 146{,}05$, donc 147 sacs, coût $147 \times 141{,}95 = 20\,866{,}65$ € ;
– Marque B : $73\,027 \div 400 \approx 182{,}6$, donc 183 sacs, coût $183 \times 87{,}90 = 16\,085{,}70$ € ;
– Marque C : $73\,027 \div 300 \approx 243{,}4$, donc 244 sacs, coût $244 \times 66{,}50 = 16\,226$ €.
Le coût le plus faible est celui de la marque B. **Il faut choisir la marque B (16 085,70 €).**

Conseils pour le jour J

Le point fort de ce sujet, c'est l'exercice 2 : la réciproque de Pythagore (les deux calculs séparés puis la comparaison), Thalès avec les trois rapports écrits, et une trigonométrie où il faut nommer côté adjacent et hypoténuse avant d'écrire le cosinus. En probabilités (situation 2. b), le roi de cœur ne compte qu'une fois : 11 cartes et non 12. Pour la moyenne pondérée de l'exercice 3, pose le tableau des produits prix × effectif, cela évite les oublis, et garde la calculatrice pour la division finale. À l'exercice 5, convertis 2 min 9 s en 129 s (et non 2,9 min) et, pour les sacs de gazon, arrondis toujours à l'entier supérieur avant de multiplier par le prix : c'est le piège du barème. Enfin, dans le programme Scratch, l'angle de rotation est l'angle extérieur ($180°$ moins l'angle du parallélogramme), pas l'angle intérieur.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).