Corrigé – Brevet 2022 – mathématiques – Amérique du Nord

Pythagore et homothétie dans un triangle, QCM : probabilités, proportionnalité et fonctions, Statistiques sur la pratique physique, Programmation Scratch et probabilités, Programme de calcul, tableur et preuve algébrique

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Pythagore et homothétie dans un triangle *(22 pts)*

1. D'après le codage, le triangle MHS est rectangle en H ; son hypoténuse est [MS]. D'après le **théorème de Pythagore** : $MS^2 = MH^2 + HS^2$, soit $13^2 = 5^2 + HS^2$. D'où $HS^2 = 169 - 25 = 144$ et $HS = \sqrt{144} = 12$. **HS = 12 cm.**

2. Les droites (HS) et (AT) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (HT) (angles droits codés en H et en T), donc elles sont parallèles. Les points M, A, S sont alignés et les points M, T, H sont alignés (les droites (AS) et (TH) sont sécantes en M). D'après le **théorème de Thalès** : $\dfrac{MT}{MH} = \dfrac{MA}{MS} = \dfrac{AT}{HS}$, soit $\dfrac{7}{5} = \dfrac{AT}{12}$. D'où $AT = \dfrac{7 \times 12}{5} = 16{,}8$. **AT = 16,8 cm.**

3. Dans le triangle MHS rectangle en H, [MH] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{HMS}$ et [MS] est l'hypoténuse : $\cos\widehat{HMS} = \dfrac{MH}{MS} = \dfrac{5}{13}$. À la calculatrice, $\widehat{HMS} = \arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) \approx 67{,}4°$. **L'angle $\widehat{HMS}$ mesure environ $67°$.**

4. Une homothétie (de centre M et de rapport $-\dfrac{7}{5} = -1{,}4$: le triangle MAT est un agrandissement de MHS, retourné par rapport au centre M).

5. Dans une homothétie de rapport k (ou un agrandissement de coefficient $|k|$), les longueurs sont multipliées par $|k|$ mais les aires par k^2. Ici les longueurs sont multipliées par 1,4, donc les aires par $1{,}4^2 = 1{,}96$.
Vérification : aire de MHS $= \dfrac{MH \times HS}{2} = \dfrac{5 \times 12}{2} = 30$ cm² ; aire de MAT $= \dfrac{MT \times AT}{2} = \dfrac{7 \times 16{,}8}{2} = 58{,}8$ cm², et $\dfrac{58{,}8}{30} = 1{,}96 \neq 1{,}4$. **L'affirmation est fausse : l'aire de MAT est 1,96 fois plus grande que celle de MHS.**

Exercice 2 – QCM : probabilités, proportionnalité et fonctions *(15 pts)*

Question 1 : réponse B ($\frac{1}{4}$). Les numéros inférieurs ou égaux à 5 sont 1, 2, 3, 4, 5 : 5 issues sur 20 équiprobables, $p = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

Question 2 : réponse D (490 mL). Le ratio 1 : 7 signifie que la boisson est composée de $1 + 7 = 8$ volumes égaux. Un volume vaut $560 \div 8 = 70$ mL, donc l'eau représente $7 \times 70 = 490$ mL.

Question 3 : réponse C ($f(x) = \frac{5}{4}x$). Une fonction linéaire s'écrit $f(x) = ax$. La condition $f\left(\frac{4}{5}\right) = 1$ donne $a \times \frac{4}{5} = 1$, soit $a = \frac{5}{4}$. Les réponses A et D ne sont pas des fonctions linéaires.

Question 4 : réponse B ($3 \times 5 \times 13$). $195 = 3 \times 65 = 3 \times 5 \times 13$, et 3, 5, 13 sont premiers. Dans les réponses A et D, 39 et 65 ne sont pas premiers ; la réponse C est une somme.

Question 5 : réponse B (60 cm³). La base du prisme droit est un triangle rectangle de côtés de l'angle droit 3 cm et 5 cm : aire $= \frac{3 \times 5}{2} = 7{,}5$ cm². Volume $= 7{,}5 \times 8 = 60$ cm³ (120 cm³ serait le volume du pavé complet).

Exercice 3 – Statistiques sur la pratique physique *(20 pts)*

1. 81 % de 1,6 million : $\frac{81}{100} \times 1\,600\,000 = 1\,296\,000$. **Environ 1 296 000 adolescents ne respectent pas la recommandation.**

2. a) On convertit toutes les durées en minutes : 50 ; 15 ; 60 ; 100 ; 30 ; 90 ; 40 ; 15 ; 60 ; 90 ; 30 ; 60 ; 60 ; 0. La durée maximale est 100 min (jour 4) et la minimale 0 min (jour 14) : étendue $= 100 - 0 = 100$ min. **L'étendue est de 100 min, soit 1 h 40 min.**

2. b) On range les 14 durées dans l'ordre croissant : 0 ; 15 ; 15 ; 30 ; 30 ; 40 ; **50** ; **60** ; 60 ; 60 ; 60 ; 90 ; 90 ; 100. L'effectif 14 est pair : la médiane se situe entre la 7^{e} valeur (50 min) et la 8^{e} (60 min). On prend leur moyenne : $\frac{50 + 60}{2} = 55$. **Une médiane de cette série est 55 min** (toute valeur entre 50 et 60 min convient).

3. a) Durée totale sur 14 jours : $50 + 15 + 60 + 100 + 30 + 90 + 40 + 15 + 60 + 90 + 30 + 60 + 60 + 0 = 700$ min. Moyenne quotidienne $= \frac{700}{14} = 50$ min. Comme $50 < 60$, **l'adolescent n'a pas atteint son objectif d'une heure par jour en moyenne.**

3. b) Pour une moyenne d'au moins 60 min par jour sur 21 jours, il faut un total d'au moins $21 \times 60 = 1\,260$ min. Il a déjà fait 700 min, il lui manque $1\,260 - 700 = 560$ min. **Sur les 7 derniers jours, il doit prévoir au minimum 560 min de pratique, soit 9 h 20 min** (une moyenne de 80 min par jour).

Exercice 4 – Programmation Scratch et probabilités *(21 pts)*

1. Le bloc « rectangle » fait avancer le lutin de 60 pas, tourner de 90° vers la gauche, avancer de 80 pas, tourner de 90°, et répète ces instructions deux fois : il trace un rectangle de 60 pas sur 80 pas. À l'échelle 1 cm pour 20 pas, on dessine **un rectangle de 3 cm de largeur (horizontale) sur 4 cm de hauteur (verticale)**, le lutin partant du sommet en bas à gauche et revenant à ce point à la fin du bloc.

2. Après chaque motif, le lutin est revenu à son point de départ (le coin inférieur gauche du motif) et avance de 100 pas (ligne 10). Le rectangle ayant une largeur de 60 pas, l'espace entre deux rectangles consécutifs est $d = 100 - 60 = 40$. **$\mathbf{d = 40}$ pas.**

3. L'instruction « nombre aléatoire entre 1 et 2 » donne 1 ou 2 avec la même probabilité ; le lutin dessine une croix si le nombre vaut 1. **La probabilité que le premier motif soit une croix est $\dfrac{1}{2}$.**

4. En notant C une croix et R un rectangle, les 8 affichages possibles (dans l'ordre de gauche à droite) sont :
C C C ; C C R ; C R C ; R C C ; C R R ; R C R ; R R C ; R R R.
Sur la copie, on dessine chacun de ces alignements de trois motifs (croix ou rectangle) à main levée.

5. Le joueur gagne pour les affichages « C C C » et « R R R », soit 2 affichages gagnants sur 8 équiprobables : $p = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$. **La probabilité de gagner est $\dfrac{1}{4}$.**

6. Pour avoir deux fois plus de chances d'obtenir un rectangle qu'une croix, il faut une chance sur trois d'obtenir une croix : on tire un nombre au hasard parmi 1, 2, 3 et on dessine la croix uniquement s'il vaut 1.
Instruction : « nombre aléatoire entre 1 et 3 $= 1$ » (la croix a alors une probabilité $\dfrac{1}{3}$ et le rectangle $\dfrac{2}{3}$).

Exercice 5 – Programme de calcul, tableur et preuve algébrique *(22 pts)*

Partie A

1. Le carré de 15 est $15^2 = 225$; on ajoute le nombre de départ : $225 + 15 = 240$. **On obtient bien 240.**

2. La cellule B2 doit contenir le carré de A2 augmenté de A2 : **=A2*A2+A2** (ou =A2^2+A2).

3. Avec x au départ, le carré est x^2 et l'on ajoute x : **le résultat est $x^2 + x$.**

Partie B

4. Avec 9, le programme donne $9^2 + 9 = 81 + 9 = 90$. L'entier qui suit 9 est 10, et $9 \times 10 = 90$. **L'affirmation est vraie pour 9.**

5. Soit x un nombre entier ; l'entier qui le suit est $x + 1$. En développant : $x(x+1) = x \times x + x \times 1 = x^2 + x$, ce qui est exactement le résultat du programme (question 3). **L'affirmation est donc vraie quel que soit l'entier choisi au départ.**

6. D'après la question 5, le résultat est $x(x+1)$, produit de deux entiers consécutifs. Or, parmi deux entiers consécutifs, l'un est pair et l'autre impair :
– si x est pair, on peut écrire $x = 2k$ avec k entier, et $x(x+1) = 2k(x+1) = 2 \times [k(x+1)]$ est pair ;
– si x est impair, alors $x + 1$ est pair, $x + 1 = 2k$, et $x(x+1) = 2 \times (kx)$ est pair.
Dans les deux cas, le résultat est le double d'un entier. **Le nombre obtenu à l'arrivée est toujours pair.**

Conseils pour le jour J

L'exercice 1 est un enchaînement classique Pythagore → Thalès → cosinus ; pense à justifier le parallélisme de (HS) et (AT) (deux droites perpendiculaires à une même droite) avant d'appliquer Thalès, c'est souvent oublié, et retiens que les aires sont multipliées par le carré du rapport (1,96 et non 1,4). À l'exercice 3, convertis toutes les durées en minutes avant de calculer, et pour la médiane d'un effectif pair, explique que toute valeur entre la 7^{e} et la 8^{e} convient. L'exercice 4 ne demande aucune justification : une liste claire des 8 affichages suffit, ne perds pas de temps à dessiner joliment. Enfin, à l'exercice 5, la question 6 est la plus exigeante du sujet : le raisonnement par cas (x pair ou x impair) avec l'écriture $2k$ est ce que le barème récompense, un simple exemple numérique ne vaut rien.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).