Corrigé – Brevet 2021 – mathématiques – Pays du groupe 1

Questions variées : nombres premiers, transformations, fractions, trigonométrie, Probabilités avec un dé puis deux dés, Programmes de calcul, Scratch et équation produit nul, Thalès, vitesse et pente d'une route au col de Hardknott, Fonctions affines et graphique : trois formules de ski

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Questions variées : nombres premiers, transformations, fractions, trigonométrie *(24 pts)*

Aucune justification n'est exigée dans cet exercice ; les explications sont données pour comprendre.

1) $360 = 2 \times 180 = 2 \times 2 \times 90 = 2 \times 2 \times 2 \times 45 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$. $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$**.** (Vérification : $8 \times 9 \times 5 = 360$.)

2) a) La droite (BD) est l'axe horizontal de la figure. Par la symétrie d'axe (BD), les points B et J, situés sur l'axe, sont leurs propres images, et le point E a pour image le point F, symétrique de E par rapport à (BD). **L'image du triangle BEJ est le triangle BFJ.**

2) b) La translation qui transforme E en B fait glisser chaque point d'une « case » vers le bas et vers la gauche, parallèlement à (EB), de la longueur EB. Ainsi A a pour image E, M a pour image F et H a pour image M. **L'image du triangle AMH est le triangle EFM.**

2) c) Le triangle AMD a la même forme que le triangle AIH, mais ses côtés sont deux fois plus longs : I est le milieu de [AM] et H est le milieu de [AD], donc $AM = 2 \times AI$ et $AD = 2 \times AH$, avec les points A, I, M alignés dans cet ordre et A, H, D aussi. **On passe du triangle AIH au triangle AMD par l'homothétie de centre A et de rapport 2.**

3) La multiplication est prioritaire sur l'addition.
$\dfrac{7}{2} + \dfrac{15}{6} \times \dfrac{7}{25} = \dfrac{7}{2} + \dfrac{3 \times 5 \times 7}{2 \times 3 \times 5 \times 5} = \dfrac{7}{2} + \dfrac{7}{10} = \dfrac{35}{10} + \dfrac{7}{10} = \dfrac{42}{10} = \dfrac{21}{5}$.
Le résultat est $\dfrac{21}{5}$, fraction irréductible car 21 et 5 n'ont pas d'autre diviseur commun que 1 ($21 = 3 \times 7$).
Contrôle en écriture décimale : $3{,}5 + 2{,}5 \times 0{,}28 = 3{,}5 + 0{,}7 = 4{,}2 = \dfrac{21}{5}$.

> ⚠ **Piège.** Ne commence pas par additionner $\dfrac{7}{2} + \dfrac{15}{6}$: la multiplication est prioritaire. Et simplifie avant de multiplier (décomposition en facteurs), les calculs restent beaucoup plus petits.

4) Réponse D ($2{,}2 \times 10^{10}$ km³). Le rayon de la Lune est $r = 3\,474 \div 2 = 1\,737$ km. Le volume d'une boule est $V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 1\,737^3 \approx 2{,}195 \times 10^{10}$ km³, soit environ $2{,}2 \times 10^{10}$ km³. (La réponse C correspond à l'erreur qui consiste à prendre le diamètre à la place du rayon : on trouve alors un volume 8 fois trop grand, environ $1{,}8 \times 10^{11}$ km³.)

5) Dans le triangle RST rectangle en S, l'hypoténuse est [RT].
– Pour l'angle $\widehat{STR}$ (sommet T) : le côté opposé est [RS] et le côté adjacent est [ST], donc $\tan \widehat{STR} = \dfrac{RS}{ST} = \dfrac{10}{24}$, d'où $\widehat{STR} \approx 22{,}6°$, soit **environ** $23°$.
– Pour l'angle $\widehat{SRT}$ (sommet R) : $\tan \widehat{SRT} = \dfrac{ST}{RS} = \dfrac{24}{10}$, d'où $\widehat{SRT} \approx 67{,}4°$, soit **environ** $67°$ (contrôle : $90° + 23° + 67° = 180°$).

– Périmètre : $\mathcal{P} = 10 + 24 + 26 = 60$ mm.
– Aire : les côtés de l'angle droit sont [RS] et [ST], donc $\mathcal{A} = \dfrac{10 \times 24}{2} = 120$ mm².

Tableau de l'annexe complété :

Longueurs	**Angles**	**Périmètre du triangle RST**	**Aire du triangle RST**
RS = 10 mm	$\widehat{RST} = 90°$	$\mathcal{P} = 60$ **mm**	$\mathcal{A} = 120$ **mm²**
ST = 24 mm	$\widehat{STR} \approx 23°$		
RT = 26 mm	$\widehat{SRT} \approx 67°$		

Exercice 2 – Probabilités avec un dé puis deux dés *(21 pts)*

Partie 1

1) Les issues possibles sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

2) Le dé est bien équilibré : les 6 issues sont équiprobables et une seule réalise l'évènement A. $P(A) = \dfrac{1}{6}$**.**

3) Les nombres impairs sont 1, 3 et 5, soit 3 issues favorables sur 6 : $P(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$**.**

Partie 2

1) Le plus grand score possible est $6 + 6 = 12$: il est impossible d'obtenir 13. $P(C) = 0$ **: C est un évènement impossible.**

2) a) Chaque case contient la somme du numéro du dé rouge (ligne) et du numéro du dé vert (colonne) :

Dé rouge / Dé vert	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

2) b) Les scores possibles sont 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12.

3) a) Les deux dés sont bien équilibrés : les 36 cases du tableau sont 36 issues équiprobables. Le score 10 apparaît 3 fois (rouge 4 et vert 6, rouge 5 et vert 5, rouge 6 et vert 4). $P(D) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$**.**

> ⚠ **Piège.** Les 11 scores ne sont **pas** équiprobables : $P(D)$ n'est pas $\dfrac{1}{11}$. Il faut compter dans les 36 cases du tableau, qui, elles, ont toutes la même probabilité.

3) b) Les multiples de 4 parmi les scores possibles sont 4, 8 et 12. Dans le tableau, 4 apparaît 3 fois, 8 apparaît 5 fois et 12 apparaît 1 fois, soit $3 + 5 + 1 = 9$ cases. $P(E) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$**.**

3) c) Score premier. Parmi les scores de 2 à 12, les nombres premiers sont 2, 3, 5, 7 et 11 (4, 6, 8, 9, 10 et 12 ont d'autres diviseurs que 1 et eux-mêmes). Dans le tableau : 2 apparaît 1 fois, 3 : 2 fois, 5 : 4 fois, 7 : 6 fois, 11 :

2 fois, soit $1+2+4+6+2=15$ cases. La probabilité vaut $\frac{15}{36}$.
Score strictement plus grand que 7. Ce sont les scores 8, 9, 10, 11 et 12, qui apparaissent respectivement 5, 4, 3, 2 et 1 fois, soit $5+4+3+2+1=15$ cases. La probabilité vaut aussi $\frac{15}{36}$.
Les deux probabilités sont égales (à $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$) : **le score a autant de chances d'être un nombre premier que d'être strictement plus grand que 7.**

Exercice 3 – Programmes de calcul, Scratch et équation produit nul *(16 pts)*

1) a) Avec 1 comme nombre de départ, le programme A calcule : Valeur 1 $=1+1=2$; Valeur 2 $=3\times 2=6$; résultat $=6-3=3$. **Le programme A affiche bien « On obtient 3 » pendant 2 secondes.**

1) b) Avec 2 comme nombre de départ, le programme B calcule : Valeur 1 $=2+3=5$; Valeur 2 $=2-5=-3$; résultat $=5\times(-3)=-15$. **Le programme B affiche bien « On obtient -15 » pendant 2 secondes.**

2) On part de x ; on multiplie par 7 : $7x$; on ajoute 3 : $7x+3$; on soustrait le nombre de départ : $7x+3-x=6x+3$. **Le programme C donne $6x+3$.**

3) On cherche l'expression obtenue avec chaque programme pour un nombre de départ x.
– Programme A : Valeur 1 $=1+x$; Valeur 2 $=3(1+x)=3+3x$; résultat $=3+3x-3=3x$.
– Programme B : résultat $=(x+3)(x-5)$, qui n'est pas toujours le triple de x (avec 2, on obtient -15 et non 6).
– Programme C : $6x+3$, qui n'est pas toujours le triple de x (avec 0, on obtient 3 et non 0).
L'élève a raison : avec le programme A, on obtient toujours $3x$, le triple du nombre choisi.

> **Astuce.** Pour prouver qu'une propriété est vraie « toujours », un ou deux exemples ne suffisent pas : il faut le calcul littéral avec x. En revanche, pour prouver qu'elle est fausse, un seul contre-exemple suffit.

4) a) Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul (**équation produit nul**).
$(x+3)(x-5)=0$ équivaut à $x+3=0$ ou $x-5=0$, c'est-à-dire $x=-3$ ou $x=5$. **L'équation a deux solutions : -3 et 5.**

4) b) Le programme B calcule $(x+3)(x-5)$ (Valeur 1 $=x+3$, Valeur 2 $=x-5$, résultat $=$ Valeur 1 $\times$ Valeur 2). Il affiche « On obtient 0 » lorsque $(x+3)(x-5)=0$, c'est-à-dire d'après la question 4. a) : **pour les nombres de départ -3 et 5.**

5) On cherche x tel que le programme C et le programme A donnent le même résultat : $6x+3=3x$, soit $6x-3x=-3$, donc $3x=-3$ et $x=-1$.
Vérification : programme A : $3\times(-1)=-3$; programme C : $7\times(-1)+3-(-1)=-7+3+1=-3$. **Les deux programmes affichent le même résultat pour la seule valeur de départ -1.**

Exercice 4 – Thalès, vitesse et pente d'une route au col de Hardknott *(19 pts)*

1) Le dénivelé est la différence entre l'altitude du sommet et celle du point de départ : $EC=393-251=142$. **Le dénivelé EC est bien égal à 142 m.**

2) a) Les points A, B et C sont alignés, donc les droites (AB) et (AC) sont confondues. On sait que (DB) $\perp$ (AB), donc (DB) $\perp$ (AC), et que (EC) $\perp$ (AC). Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles. **Les droites (DB) et (EC) sont donc parallèles.**

2) b) Les points A, D, E sont alignés, les points A, B, C sont alignés et les droites (DB) et (EC) sont parallèles. D'après le **théorème de Thalès** : $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{EC}$.

On utilise $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{DB}{EC}$, soit $\dfrac{51{,}25}{AE} = \dfrac{11{,}25}{142}$, d'où $AE = \dfrac{51{,}25 \times 142}{11{,}25} = \dfrac{7\,277{,}5}{11{,}25} \approx 646{,}89$ m.
Comme D est sur [AE] : $DE = AE - AD \approx 646{,}89 - 51{,}25 \approx 595{,}64$ m. **La distance DE qu'il reste à parcourir est d'environ 596 m.**

> ⚠ **Piège.** Le théorème de Thalès donne d'abord AE (la longueur totale depuis A), pas DE : n'oublie pas de soustraire AD = 51,25 m à la fin.

3) Aurélie roule à 8 km/h, c'est-à-dire 8 000 m en 60 min. On calcule la durée du trajet de 596 m : $t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{0{,}596}{8} = 0{,}074\,5$ h, soit $0{,}074\,5 \times 60 = 4{,}47$ min (environ 4 min 28 s).
Contrôle par proportionnalité : $\dfrac{596 \times 60}{8\,000} = 4{,}47$ min.
Arrondie à la minute, la durée est de 4 min : 9 h 55 min + 4 min = 9 h 59 min. **Aurélie arrivera au point E vers 9 h 59.**

4) Dans le triangle ABD rectangle en B, d'après le **théorème de Pythagore** : $AD^2 = AB^2 + DB^2$, donc $AB^2 = 51{,}25^2 - 11{,}25^2 = 2\,626{,}562\,5 - 126{,}562\,5 = 2\,500$ et $AB = \sqrt{2\,500} = 50$ m.
La route est droite de A à E : d'après le théorème de Thalès (question 2), $\dfrac{DB}{EC} = \dfrac{AB}{AC}$, donc $\dfrac{EC}{AC} = \dfrac{DB}{AB}$. La pente de la route vaut donc :
$\text{pente} = \dfrac{\text{dénivelé}}{\text{longueur horizontale parcourue}} = \dfrac{EC}{AC} = \dfrac{DB}{AB} = \dfrac{11{,}25}{50} = 0{,}225 = \dfrac{22{,}5}{100}$.
Vérification avec le parcours complet : $AC = AB \times \dfrac{EC}{DB} = 50 \times \dfrac{142}{11{,}25} \approx 631{,}1$ m et $\dfrac{142}{631{,}1} \approx 0{,}225$. **La pente de la route est bien de 22,5 %.**

Exercice 5 – Fonctions affines et graphique : trois formules de ski *(20 pts)*

1) Formule A : 36,50× nombre de journées. Formule B : 90 + 18,50× nombre de journées. Formule C : 448,50 € quel que soit le nombre de journées.
Pour 6 journées : A : $36{,}5 \times 6 = 219$ € ; B : $90 + 18{,}5 \times 6 = 90 + 111 = 201$ €.
Pour 10 journées : A : $36{,}5 \times 10 = 365$ € ; B : $90 + 18{,}5 \times 10 = 90 + 185 = 275$ €.

Nombre de journées de ski	**2**	**6**	**10**
Formule A	73 €	**219 €**	**365 €**
Formule B	127 €	**201 €**	**275 €**
Formule C	448,50 €	**448,50 €**	**448,50 €**

2) a) Une situation de proportionnalité est représentée par une fonction linéaire, de la forme $x \mapsto ax$. **C'est la fonction h, définie par $h(x) = 36{,}5x$.** (f est affine mais non linéaire à cause du terme constant 90, et g est constante.)

2) b) Formule A ↔ fonction h ; formule B ↔ fonction f ; formule C ↔ fonction g.

2) c) On résout $f(x) = h(x)$: $90 + 18{,}5x = 36{,}5x$, soit $90 = 36{,}5x - 18{,}5x = 18x$, donc $x = \dfrac{90}{18} = 5$.
Vérification : $h(5) = 36{,}5 \times 5 = 182{,}5$ et $f(5) = 90 + 18{,}5 \times 5 = 90 + 92{,}5 = 182{,}5$. **Pour 5 journées de ski, les formules A et B coûtent le même montant (182,50 €).**

3) a) (d_1) **représente** g (droite horizontale : le prix reste 448,50 €) ; (d_2) **représente** h (droite qui passe par l'origine : proportionnalité) ; (d_3) **représente** f (droite qui coupe l'axe des ordonnées en 90).

3) b) Avec 320 €, la formule C (448,50 €) est hors budget. On trace la droite horizontale d'ordonnée 320 : elle coupe (d_2) vers l'abscisse 8,8 et (d_3) vers l'abscisse 12,4. C'est donc la formule B qui permet de skier le plus

longtemps, et le nombre de journées étant entier, on retient 12 journées. Contrôle : $f(12) = 90 + 18{,}5 \times 12 = 312$ € ≤ 320 € mais $f(13) = 330{,}50$ €, qui dépasse 320 €. **Marin peut skier au maximum 12 journées, avec la formule B.**

3) c) La formule C est la plus avantageuse lorsque la droite (d_1) est en dessous des deux autres. Sur le graphique, (d_1) passe en dessous de (d_2) vers 12,3 journées, puis en dessous de (d_3) entre 19 et 20 journées (abscisse environ 19,4). Contrôle : pour 19 journées, la formule B coûte $90 + 18{,}5 \times 19 = 441{,}50$ €, moins que 448,50 € ; pour 20 journées, elle coûte $90 + 18{,}5 \times 20 = 460$ €, plus que 448,50 €. **La formule C devient avantageuse à partir de 20 journées de ski.**

> 💡 **Astuce.** Le nombre de journées est un nombre entier : quand le graphique donne une intersection « entre deux graduations » (12,4 ou 19,4), vérifie par le calcul la valeur entière juste avant et juste après pour conclure sans hésiter.

Conseils pour le jour J

Ce sujet comporte une **annexe à rendre avec la copie** (exercices 1, 2 et 5) : remplis-la au fur et à mesure et n'oublie pas de la glisser dans ta copie, sinon ces points sont perdus. L'exercice 1 ne demande aucune justification : avance vite, mais contrôle chaque résultat (le produit $2^3 \times 3^2 \times 5$ doit redonner 360, les deux angles aigus doivent faire 90° à eux deux).

En probabilités, raisonne toujours sur les 36 cases équiprobables du tableau, jamais sur les 11 scores. À l'exercice 4, la question 2. b) donne AE et non DE ; à la question 3, convertis la vitesse (8 km/h = 8 000 m en 60 min) avant de calculer la durée. Enfin, à l'exercice 5, les lectures graphiques sont demandées « sans justifier », mais un petit calcul de contrôle au brouillon (par exemple $f(12)$ et $f(13)$) évite de se tromper d'une journée.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).