Corrigé – Brevet 2020 – mathématiques – Pays du groupe 1 (remplacement)

Sept questions indépendantes : fractions, PGCD, puissances de 10, volume, Pythagore, probabilités, Statistiques sur des boules de pétanque, Programme de calcul, calcul littéral et fonction, Trigonométrie, pente et vitesse : le téléphérique de Grenoble, Scratch, triangles équilatéraux et homothétie

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Sept questions indépendantes : fractions, PGCD, puissances de 10, volume, Pythagore, probabilités *(22 pts)*

1. La multiplication est prioritaire sur la soustraction : $\frac{7}{8} - \frac{5}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{8} - \frac{5}{24}$.
On met au même dénominateur 24 : $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$, donc $\frac{21}{24} - \frac{5}{24} = \frac{16}{24}$.
On simplifie par 8 : $\frac{16}{24} = \frac{8 \times 2}{8 \times 3} = \frac{2}{3}$. **Le résultat est $\frac{2}{3}$**, fraction irréductible car 2 et 3 n'ont pas d'autre diviseur commun que 1.

> ⚠ **Piège.** Ne calcule pas $\frac{7}{8} - \frac{5}{8}$ en premier : la multiplication passe avant la soustraction. L'ordre faux donne $\frac{2}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$, ce qui est inexact.

2. $342 = 2 \times 3^2 \times 19$ et $380 = 2^2 \times 5 \times 19$. Le plus grand diviseur commun s'obtient en prenant les facteurs premiers communs aux deux décompositions, chacun avec le plus petit exposant : 2 (une fois) et 19. $2 \times 19 = 38$. On vérifie : $342 = 38 \times 9$ et $380 = 38 \times 10$, et 9 et 10 n'ont que 1 comme diviseur commun. **Le plus grand nombre entier qui divise à la fois 342 et 380 est 38.**

3. On écrit les deux longueurs avec la même puissance de 10 :
11×10^{-8} m $= 0{,}000\,000\,11$ m $= 1{,}1 \times 10^{-7}$ m ;
$0{,}9 \times 10^{-5}$ m $= 0{,}000\,009$ m $= 90 \times 10^{-7}$ m.
Comme $1{,}1 < 90$, on a $11 \times 10^{-8} < 0{,}9 \times 10^{-5}$. **La longueur $0{,}9 \times 10^{-5}$ m est la plus grande** (environ 82 fois plus grande que l'autre).

4. Le diamètre vaut 6 cm, donc le rayon vaut $r = 6 \div 2 = 3$ cm.
$V = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 27 = 36\pi \approx 113{,}1$ cm³. **Le volume de la boule vaut environ 113 cm³.**

5. Le plus grand côté mesure 6,4 cm. On compare le carré du plus grand côté à la somme des carrés des deux autres :
d'une part $6{,}4^2 = 40{,}96$;
d'autre part $3{,}9^2 + 5{,}2^2 = 15{,}21 + 27{,}04 = 42{,}25$.
Comme $40{,}96 \neq 42{,}25$, l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée. D'après la **contraposée du théorème de Pythagore**, **ce triangle n'est pas rectangle.**

6. Les boules sont équiprobables, donc $p(\text{jaune}) = \frac{\text{nombre de boules jaunes}}{20} = \frac{1}{5}$. Le nombre de boules jaunes vaut $20 \times \frac{1}{5} = 4$. **L'urne contient 4 boules jaunes.**

7. La roue comporte 12 secteurs équiprobables. D'après la figure, les secteurs gris portent les nombres 2, 5, 8, 13, 15 et 23 (les secteurs 1, 3, 7, 11, 14 et 21 sont blancs).
Parmi ces secteurs gris, les nombres premiers (qui ont exactement deux diviseurs, 1 et eux-mêmes) sont 2, 5, 13 et 23 ; en revanche $8 = 2 \times 4$ et $15 = 3 \times 5$ ne sont pas premiers.

Il y a donc 4 issues favorables sur 12 : $p = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$. **La probabilité que la flèche indique un secteur gris contenant un nombre premier est $\dfrac{1}{3}$.**

Exercice 2 – Statistiques sur des boules de pétanque *(13 pts)*

1. L'étendue est la différence entre le plus grand et le plus petit diamètre : elle vaut 12 mm, soit 1,2 cm. Tous les diamètres sont inférieurs ou égaux à 8,2 cm et le tableau contient des boules de 8,2 cm : le plus grand diamètre est donc 8,2 cm.
Le plus petit diamètre vaut alors $8{,}2 - 1{,}2 = 7$ cm. Or aucun diamètre connu du tableau ne vaut 7 cm (le plus petit est 7,05 cm) : si la boule de 620 g avait un diamètre d'au moins 7,05 cm, l'étendue vaudrait $8{,}2 - 7{,}05 = 1{,}15$ cm $= 11{,}5$ mm, et non 12 mm. Le plus petit diamètre, 7 cm, est donc celui de la seule valeur manquante. **La boule de 620 g a un diamètre de 7 cm.**

2. a) L'effectif total vaut $1+2+4+5+2+3+4+1+1+2+2+2+1 = 30$ boules (10 joueurs $\times$ 3 boules).
Somme des masses : $620\times1 + 626\times2 + 633\times4 + 655\times5 + 678\times2 + 725\times3 + 758\times4 + 767\times1 + 775\times1 + 790\times2 + 800\times2 + 805\times2 + 813\times1$
$= 620 + 1\,252 + 2\,532 + 3\,275 + 1\,356 + 2\,175 + 3\,032 + 767 + 775 + 1\,580 + 1\,600 + 1\,610 + 813 = 21\,387$ g.
Masse moyenne : $\dfrac{21\,387}{30} = 712{,}9$ g. Comme $712{,}9 \geqslant 626$, **la masse moyenne (712,9 g) est bien supérieure ou égale à 626 g.**

2. b) L'effectif total est 30 (pair) : la médiane est la moyenne de la 15e et de la 16e valeur de la série rangée dans l'ordre croissant. Les masses sont déjà rangées ; effectifs cumulés : 620 g $\to$ 1 ; 626 g $\to$ 3 ; 633 g $\to$ 7 ; 655 g $\to$ 12 ; 678 g $\to$ 14 ; 725 g $\to$ 17. Les 15e et 16e valeurs valent donc toutes les deux 725 g. **La masse médiane est 725 g.**

3. Une boule n'est pas acceptée en compétition si son diamètre n'est pas compris entre 7,05 cm et 8 cm, **ou** si sa masse n'est pas comprise entre 650 g et 800 g (toutes les boules sont en acier, donc en métal). On passe en revue le tableau :
– 620 g (7 cm) : masse et diamètre trop petits $\to$ 1 boule ;
– 626 g (7,05 cm) : masse trop petite $\to$ 2 boules ;
– 633 g (7,25 cm) : masse trop petite $\to$ 4 boules ;
– 800 g (8,1 cm) : masse acceptée mais diamètre trop grand $\to$ 2 boules ;
– 805 g (8,2 cm) : masse et diamètre trop grands $\to$ 2 boules ;
– 813 g (8,2 cm) : masse et diamètre trop grands $\to$ 1 boule.
Les autres boules (655 g à 790 g, diamètres de 7,3 cm à 7,75 cm) respectent les deux conditions.
Nombre de boules refusées : $1+2+4+2+2+1 = 12$. Un tiers des 30 boules représente $30 \div 3 = 10$ boules, et $12 > 10$ (en proportion, $\dfrac{12}{30} = 0{,}4 > \dfrac{1}{3}$). **Oui, on peut affirmer qu'au moins un tiers des boules ne seraient pas acceptées en compétition officielle (12 boules sur 30, soit 40 %).**

> ⚠ **Piège.** Les boules de 800 g ont une masse acceptée (800 g est le maximum autorisé), mais leur diamètre de 8,1 cm dépasse 8 cm : il faut vérifier les **deux** critères pour chaque colonne du tableau.

Exercice 3 – Programme de calcul, calcul littéral et fonction *(25 pts)*

1. a) Avec 3 : $3+2 = 5$; $5^2 = 25$; $25 - 9 = 16$. **Le programme donne bien 16.**

1. b) Avec -6 : $-6+2 = -4$; $(-4)^2 = 16$; $16 - 9 = 7$. **Le programme donne 7.**

2. Avec x : on ajoute 2, on obtient $x+2$; on met au carré : $(x+2)^2$; on enlève 9. **Le résultat du programme est $(x+2)^2 - 9$.**

3. a) On remarque que $9 = 3^2$: $(x+2)^2 - 9 = (x+2)^2 - 3^2$. On applique l'**identité remarquable** $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ avec $a = x+2$ et $b = 3$:
$(x+2)^2 - 3^2 = (x+2-3)(x+2+3) = (x-1)(x+5)$. **Le résultat s'écrit bien** $(x+5)(x-1)$**.**

3. b) On résout $(x+5)(x-1) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x+5=0$ ou $x-1=0$, soit $x=-5$ ou $x=1$. Vérification : $(-5+2)^2 - 9 = 9-9 = 0$ et $(1+2)^2 - 9 = 9-9=0$. **Il faut choisir** -5 **ou** 1 **au départ pour obtenir 0.**

> 💡 **Astuce.** Pour résoudre « expression $= 0$ », utilise toujours la forme factorisée : la règle du produit nul donne immédiatement les solutions. La forme développée, elle, ne permet pas de conclure en 3e.

3. c) On choisit par exemple $x = 0$: $(0+5)(0-1) = 5 \times (-1) = -5$ (ou avec le programme : $0+2=2$; $2^2 = 4$; $4-9=-5$). **Avec** $x=0$**, le résultat est** -5**, un nombre négatif.** (Toute valeur strictement comprise entre -5 et 1 convient, car les deux facteurs sont alors de signes contraires.)

4. On développe avec l'**identité remarquable** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:
$(x+2)^2 - 9 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 - 9 = x^2 + 4x + 4 - 9 = x^2 + 4x - 5$.
On peut aussi développer la forme factorisée : $(x+5)(x-1) = x^2 - x + 5x - 5 = x^2 + 4x - 5$. **Le résultat s'écrit bien** $x^2 + 4x - 5$**.**

5. a) Une fonction affine s'écrit $x \mapsto ax + b$. L'expression $f(x) = x^2 + 4x - 5$ contient un terme en x^2, elle ne peut pas s'écrire sous cette forme. Par exemple, $f(0) = -5$, $f(1) = 0$, $f(2) = 7$: quand x augmente de 1, $f(x)$ augmente de 5 puis de 7, alors que pour une fonction affine les accroissements seraient égaux. **La fonction** f **n'est pas une fonction affine.**

5. b) On cherche les nombres x tels que $f(x) = -5$: $x^2 + 4x - 5 = -5$, soit $x^2 + 4x = 0$, c'est-à-dire $x(x+4) = 0$. D'après la règle du produit nul : $x = 0$ ou $x + 4 = 0$, soit $x = 0$ ou $x = -4$. Vérification : $f(0) = -5$ et $f(-4) = 16 - 16 - 5 = -5$. **Les antécédents de** -5 **par** f **sont** 0 **et** -4**.**

Exercice 4 – Trigonométrie, pente et vitesse : le téléphérique de Grenoble *(20 pts)*

1. Le point H est à la même altitude que le point de départ D (la droite (DH) est horizontale) et A est à la verticale de H. Le dénivelé AH est donc la différence des altitudes d'arrivée et de départ : $AH = 475 - 213 = 262$. **Le dénivelé AH est bien égal à 262 m.**

2. Le triangle ADH est rectangle en H. Pour l'angle $\widehat{ADH}$, on connaît le côté opposé AH $= 262$ m et l'hypoténuse AD $= 673$ m (longueur du téléphérique). On utilise le **sinus** : $\sin \widehat{ADH} = \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{262}{673}$.
À la calculatrice : $\widehat{ADH} = \arcsin\left(\dfrac{262}{673}\right) \approx 22{,}9°$. **L'angle** $\widehat{ADH}$ **mesure environ** $22{,}9°$**.**

3. On calcule d'abord DH. Dans le triangle ADH rectangle en H, d'après le **théorème de Pythagore** : $AD^2 = AH^2 + DH^2$, donc $DH^2 = 673^2 - 262^2 = 452\,929 - 68\,644 = 384\,285$ et $DH = \sqrt{384\,285} \approx 619{,}9$ m.
Pente : $\dfrac{AH}{DH} = \dfrac{262}{\sqrt{384\,285}} \approx 0{,}423$, soit environ 42,3 %. (On retrouve cette valeur avec $\tan(22{,}9°) \approx 0{,}42$.)
Comme $42{,}3\,\% < 50\,\%$, **la pente de ce téléphérique n'est pas supérieure à 50 % : elle vaut environ 42 %.**

> ⚠ **Piège.** La pente se calcule avec la distance **horizontale** DH, pas avec la longueur du câble AD $= 673$ m. Le quotient $\dfrac{262}{673} \approx 0{,}39$ est le sinus de l'angle, pas la pente.

4. a) Le trajet de D à A mesure 673 m et dure 4 min, soit $4 \times 60 = 240$ s. $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{673}{240} \approx 2{,}80$ m/s. **La vitesse du téléphérique est bien d'environ 2,8 m/s.**

4. b) La vitesse est constante : en 3 minutes, soit les $\frac{3}{4}$ du trajet, le point d'attache parcourt les $\frac{3}{4}$ du câble : $\frac{3}{4} \times 673 = 504{,}75$ m.
Appelons M la position du point d'attache et K le point de [DH] situé à sa verticale. Les droites (MK) et (AH) sont toutes deux verticales, donc parallèles ; les points D, M, A sont alignés, ainsi que D, K, H. D'après le **théorème de Thalès** : $\frac{MK}{AH} = \frac{DM}{DA} = \frac{3}{4}$, donc $MK = \frac{3}{4} \times 262 = 196{,}5$ m.
Altitude du point d'attache : $213 + 196{,}5 = 409{,}5$ m. **Trois minutes après son départ, le point d'attache se situe à environ 409,5 m d'altitude.** (Avec la valeur arrondie 2,8 m/s, on trouve $2{,}8 \times 180 = 504$ m parcourus et une altitude d'environ 409 m, ce qui est également accepté.)

5. Les deux parents paient le plein tarif : $2 \times 5{,}60 = 11{,}20$ €. Les cinq enfants ont donc coûté $30{,}20 - 11{,}20 = 19{,}00$ €.
Chaque enfant paie 3,20 € (moins de 15 ans) ou 4,20 € (15 à 18 ans). Si les 5 enfants payaient 4,20 €, la somme serait $5 \times 4{,}20 = 21{,}00$ € ; chaque enfant de moins de 15 ans fait économiser $4{,}20 - 3{,}20 = 1{,}00$ €. Il faut économiser $21{,}00 - 19{,}00 = 2{,}00$ €, donc 2 enfants ont moins de 15 ans.
Vérification : $2 \times 3{,}20 + 3 \times 4{,}20 = 6{,}40 + 12{,}60 = 19{,}00$ € et $19{,}00 + 11{,}20 = 30{,}20$ €. **Dans la famille Dupond, 2 enfants ont moins de 15 ans** (et 3 enfants ont entre 15 et 18 ans).

Exercice 5 – Scratch, triangles équilatéraux et homothétie *(20 pts)*

1. a) Chaque passage dans la boucle « répéter » trace un triangle équilatéral. La figure 1 est composée de 5 triangles équilatéraux emboîtés (le grand triangle et quatre triangles de plus en plus petits, qui partagent tous le sommet en bas à gauche). **Le nombre effacé à la ligne 8 est 5.**

1. b) Pour tracer un triangle équilatéral, le lutin doit, à chaque sommet, tourner de l'angle extérieur. Les angles d'un triangle équilatéral mesurent 60°, donc le lutin tourne de $180° - 60° = 120°$ (et $3 \times 120° = 360°$: il fait un tour complet et revient dans sa direction de départ). **Le nombre effacé à la ligne 4 est 120.**

> ⚠ **Piège.** Le lutin tourne de l'angle **extérieur** (120°), pas de l'angle intérieur (60°) : avec « tourner de 60 degrés », il tracerait la moitié d'un hexagone.

2. Au départ, la variable côté vaut 125 : le premier triangle a des côtés de 125 pixels. Ensuite, l'instruction « mettre côté à côté * k » avec $k = 0{,}8$ donne $125 \times 0{,}8 = 100$. **Le deuxième triangle tracé a bien des côtés de 100 pixels.**

3. Affirmation 1 : VRAIE. D'un triangle au suivant, la longueur du côté est multipliée par $k = 0{,}8 = 1 - 0{,}2 = 1 - \frac{20}{100}$. Multiplier par 0,8 revient à diminuer de 20 %. Exemple : de 125 à 100 pixels, la baisse est de 25 pixels et $\frac{25}{125} = 0{,}2 = 20\ \%$.

Affirmation 2 : VRAIE. Chaque triangle est une réduction du précédent de rapport $k = 0{,}8$ (côtés multipliés par 0,8). Dans une réduction de rapport k, les aires sont multipliées par $k^2 : 0{,}8^2 = 0{,}64$. **L'aire est bien multipliée par 0,64** d'un triangle au suivant.

4. a) Tous les triangles partent du même point (0 ; 0), le sommet en bas à gauche, et ont leurs côtés dans les mêmes directions, chaque côté étant multiplié par 0,8. **On passe d'un triangle au suivant par une homothétie** de centre le point de coordonnées (0 ; 0) (le sommet commun en bas à gauche) et de rapport 0,8.

4. b) Pour obtenir un agrandissement, il faut que les côtés soient multipliés par un nombre strictement supérieur à 1. **Une valeur possible est** $k = 1{,}2$ (toute valeur de k strictement supérieure à 1 convient, par exemple 1,5 ou 2).

Conseils pour le jour J

Ce sujet comporte cinq exercices indépendants : commence par ceux qui te rassurent, mais garde environ 25 minutes pour l'exercice 3 (25 points), le plus rentable si tu maîtrises le calcul littéral. Ses questions s'enchaînent : la forme factorisée $(x+5)(x-1)$ sert à résoudre l'équation de la question 3. b), et la forme développée x^2+4x-5 sert à la question 5. b) (où il faut penser à factoriser x^2+4x par x).

À l'exercice 2, lis le tableau colonne par colonne et vérifie que l'effectif total vaut 30 : la question 3 demande de tester les deux critères (diamètre et masse) pour chaque boule, et les boules de 800 g sont le piège classique. À l'exercice 4, ne confonds pas la longueur du câble (673 m) avec la distance horizontale DH, et donne les angles au dixième de degré comme demandé. Enfin, à l'exercice 5, justifie chaque réponse : « tourner de 120 degrés » s'explique par l'angle extérieur du triangle équilatéral, et le passage d'un triangle au suivant est une homothétie, pas une translation.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).