Corrigé – Brevet 2020 – mathématiques – Amérique du Nord (remplacement)

Construction, réciproque de Pythagore, Thalès et cosinus, QCM : volumes, calcul littéral, fractions, puissances, Transformations, pavage et diviseurs communs, Statistiques, vitesse et tableur sur la natation, Probabilités avec deux urnes et simulation Scratch

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Construction, réciproque de Pythagore, Thalès et cosinus *(20 pts)*

1) Programme de construction (en vraie grandeur, avec règle graduée, compas et équerre) :
– tracer le segment [AC] de longueur 10,4 cm ;
– tracer un arc de cercle de centre A et de rayon 4 cm, puis un arc de cercle de centre C et de rayon 9,6 cm : leur point d'intersection est B (on laisse les deux arcs apparents) ;
– tracer [AB] et [BC] ;
– placer K sur [CB] tel que CK = 3 cm ;
– tracer la parallèle à (AB) passant par K (en faisant glisser l'équerre le long de la règle) : elle coupe [AC] en L.
On doit obtenir un angle droit en B (vérifiable à l'équerre) et CL mesure environ 3,3 cm, ce que confirment les questions suivantes.

2) Dans le triangle ABC, le plus grand côté est [AC].
D'une part : $AC^2 = 10{,}4^2 = 108{,}16$.
D'autre part : $AB^2 + BC^2 = 4^2 + 9{,}6^2 = 16 + 92{,}16 = 108{,}16$.
On constate que $AC^2 = AB^2 + BC^2$. D'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, **le triangle ABC est rectangle en B.**

> ⚠ **Piège.** Pour la réciproque de Pythagore, calcule séparément le carré du plus grand côté et la somme des carrés des deux autres, puis compare. N'écris jamais « $AC^2 = AB^2 + BC^2$ » au début du calcul : c'est justement ce que tu dois démontrer.

3) Les points C, K, B sont alignés, les points C, L, A sont alignés, et les droites (KL) et (AB) sont parallèles.
D'après le **théorème de Thalès** :
$\dfrac{CK}{CB} = \dfrac{CL}{CA} = \dfrac{KL}{AB}$, soit $\dfrac{3}{9{,}6} = \dfrac{CL}{10{,}4}$.
Donc $CL = \dfrac{3 \times 10{,}4}{9{,}6} = \dfrac{31{,}2}{9{,}6} = 3{,}25$. **CL = 3,25 cm.**
Vérification : $\dfrac{3}{9{,}6} = 0{,}3125$ et $0{,}3125 \times 10{,}4 = 3{,}25$.

4) Le triangle ABC est rectangle en B (question 2). Pour l'angle $\widehat{CAB}$, le côté [AB] est le côté adjacent et [AC] est l'hypoténuse. On utilise le **cosinus** :
$\cos \widehat{CAB} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4}{10{,}4}$.
À la calculatrice : $\widehat{CAB} = \arccos\left(\dfrac{4}{10{,}4}\right) \approx 67{,}38°$. **L'angle $\widehat{CAB}$ mesure environ $67°$ (au degré près).**
Vérification avec la tangente : $\tan \widehat{CAB} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{9{,}6}{4} = 2{,}4$, et $\arctan(2{,}4) \approx 67{,}38°$: même résultat.

> 💡 **Astuce.** Avant d'utiliser $\cos^{-1}$ ou $\tan^{-1}$, vérifie que ta calculatrice est en mode **degrés** (un « D » ou « DEG » s'affiche à l'écran).

Exercice 2 – QCM : volumes, calcul littéral, fractions, puissances *(15 pts)*

1) Le volume d'un cube d'arête a est a^3. Si l'arête devient $3a$, le volume devient $(3a)^3 = 27a^3$. Dans un agrandissement de rapport k, les volumes sont multipliés par k^3. **Réponse D : 27.**

2) Pour $x = -4$: $(-4)^2 + 3 \times (-4) + 4 = 16 - 12 + 4 = 8$. **Réponse A : 8.**

3) On met au même dénominateur 12 : $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{12} + \dfrac{3}{12} = \dfrac{7}{12}$. **Réponse C : $\dfrac{7}{12}$.** (0,583 n'est qu'une valeur approchée de $\dfrac{7}{12} = 0{,}58333\ldots$, ce n'est pas une égalité.)

4) $1\,500\,000\,000 = 1{,}5 \times 1\,000\,000\,000 = 1{,}5 \times 10^9$. En notation scientifique, le nombre devant la puissance de 10 doit être compris entre 1 et 10 (exclu), ce qui élimine 15×10^8, pourtant égal au nombre. **Réponse D : $1{,}5 \times 10^9$.**

5) D'après l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$: $(x-2)(x+2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$. **Réponse A : $x^2 - 4$.**

> ⚠ **Piège.** À la question 4, 15×10^8 vaut bien 1 500 000 000, mais ce n'est pas une notation **scientifique** (15 n'est pas entre 1 et 10). Lis toujours le mot exact de la question.

Exercice 3 – Transformations, pavage et diviseurs communs *(18 pts)*

1) a) La symétrie centrale de centre O est un demi-tour autour de O : le polygone ❶ (en haut à gauche) est envoyé sur le polygone situé à l'opposé par rapport à O, en bas à droite. **L'image du polygone ❶ est le polygone ❸.**

1) b) La rotation de centre O qui transforme ❶ (en haut à gauche) en ❷ (en haut à droite) est un quart de tour ($90°$) dans le sens des aiguilles d'une montre. Elle envoie ❷ sur ❸, ❸ sur ❹ et ❹ sur ❶. **L'image du polygone ❹ est le polygone ❶.**

2) Le polygone ❺ occupe, dans le carré voisin de droite, exactement la même place et la même orientation que le polygone ❶ dans le carré ABCD : on passe de l'un à l'autre par un glissement horizontal de la longueur d'un côté du carré. **C'est la translation qui transforme A en B (translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$).**

3) a) Pour recouvrir exactement le tissu sans découpe avec des carrés de 9 cm de côté, il faut que 9 divise à la fois la longueur 315 et la largeur 270.
$315 = 9 \times 35$ et $270 = 9 \times 30$.
9 est donc un diviseur commun de 315 et 270 : on peut placer exactement 35 carrés dans la longueur et 30 carrés dans la largeur. **On peut donc choisir des carrés de 9 cm de côté.**

3) b) Il y a 35 carrés sur la longueur et 30 carrés sur la largeur : $35 \times 30 = 1\,050$. **1 050 carrés de 9 cm de côté seront imprimés sur le tissu.**
Vérification par les aires : $\dfrac{315 \times 270}{9 \times 9} = \dfrac{85\,050}{81} = 1\,050$.

> 💡 **Astuce.** Pour « montrer que 9 convient », il ne suffit pas de dire que 315 et 270 sont dans la table de 9 : écris les deux divisions exactes ($315 = 9 \times 35$, $270 = 9 \times 30$). Ces quotients te donnent directement le nombre de carrés par ligne et par colonne pour la question suivante.

Exercice 4 – Statistiques, vitesse et tableur sur la natation *(24 pts)*

1) On range les temps dans l'ordre croissant (le plus petit temps correspond à la première place) :
52,93 ; 53,23 ; 53,35 ; 53,61 ; 54,04 ; 54,07 ; 54,52 ; 54,56.
La troisième nageuse a le troisième meilleur temps. **Charlotte Bonnet a nagé en 53,35 s.**

2) La vitesse moyenne est $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{100}{52{,}93} \approx 1{,}889$. **La vitesse moyenne de cette nageuse est d'environ 1,9 m/s** (arrondie au dixième).

3) Moyenne : on additionne les 8 temps :
$53{,}23 + 54{,}04 + 53{,}61 + 54{,}52 + 53{,}35 + 52{,}93 + 54{,}56 + 54{,}07 = 430{,}31$.
$\dfrac{430{,}31}{8} = 53{,}78875$: la moyenne est d'environ 53,79 s.
Médiane : l'effectif est pair (8 valeurs). Dans la série rangée (question 1), la médiane est la moyenne des 4^{e} et 5^{e} valeurs : $\dfrac{53{,}61 + 54{,}04}{2} = \dfrac{107{,}65}{2} = 53{,}825$ s.
La moyenne (environ 53,79 s) est légèrement inférieure à la médiane (53,825 s) ; l'écart est très faible (moins de 4 centièmes de seconde).

4) La Grande-Bretagne a 13 médailles d'or et l'Italie 8 : $13 + 8 = 21$. La Russie en a 23. Comme $21 \neq 23$, **c'est faux** : à elles deux, elles ont 2 médailles d'or de moins que la Russie.

5) La France a remporté 12 médailles au total (cellule F8), dont 4 d'or. Proportion de médailles d'or : $\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \approx 0{,}333$, soit environ 33,3 %. Comme $33{,}3 < 35$, **c'est faux** : les médailles d'or représentent environ 33,3 % des médailles de la France, moins de 35 %.

> ⚠ **Piège.** Le pourcentage se calcule par rapport au **total des médailles de la France** (12), pas par rapport au total des médailles d'or de toutes les nations.

6) Le total d'une ligne est la somme des médailles d'or, d'argent et de bronze (colonnes C, D et E). On a pu saisir en F2 : **=C2+D2+E2** ou **=SOMME(C2:E2)**. Étirée vers le bas, elle devient =C3+D3+E3, etc. Vérification : $23 + 15 + 9 = 47$, qui est bien la valeur affichée en F2.

Exercice 5 – Probabilités avec deux urnes et simulation Scratch *(23 pts)*

On peut lister toutes les issues dans un tableau à double entrée (numéro bleu, numéro rouge). Il y a $3 \times 4 = 12$ tirages possibles, tous équiprobables :

Bleue ↓ / Rouge →	**2**	**3**	**4**	**5**
2	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)
3	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)
4	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)	(4 ; 5)

1) a) « On obtient deux nombres premiers » : c'est **possible**, par exemple avec le tirage (2 ; 3), car 2 et 3 sont premiers.
« La somme des deux nombres est égale à 12 » : la plus grande somme possible est $4 + 5 = 9$, et $9 < 12$. Cet évènement est donc **impossible**.

1) b) Les nombres premiers de l'urne bleue sont 2 et 3 (4 n'est pas premier : $4 = 2 \times 2$) ; ceux de l'urne rouge sont 2, 3 et 5. Les tirages favorables sont : (2 ; 2), (2 ; 3), (2 ; 5), (3 ; 2), (3 ; 3), (3 ; 5), soit $2 \times 3 = 6$ tirages sur 12. $p = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$. **La probabilité d'obtenir deux nombres premiers est $\dfrac{1}{2}$.**

2) Les « doubles » possibles sont (2 ; 2), (3 ; 3) et (4 ; 4) (le 5 n'existe pas dans l'urne bleue), soit 3 tirages favorables sur 12 équiprobables : $p = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$. **La probabilité d'obtenir un double est bien $\dfrac{1}{4}$.**

3) a) On répète l'expérience 1 000 fois, la boule bleue est un nombre entre 2 et 4, la boule rouge un nombre entre 2 et 5. **A = 1 000 ; B = 4 ; C = 5.**

3) b) Le bloc « Tirer deux boules » se place **à l'intérieur de la boucle « répéter 1 000 fois », au début, juste avant le bloc « si Boule bleue = Boule rouge alors »** : à chaque tour, on tire deux nouvelles boules puis on teste si c'est un double.

3) c) L'élément « mettre Nombre de doubles à 0 » se place **au début du script, juste sous « quand le drapeau vert est cliqué » et avant la boucle « répéter »** : le compteur est remis à zéro une seule fois, avant les 1 000 tirages.

3) d) La fréquence est le nombre de doubles divisé par le nombre total de tirages, c'est-à-dire 1 000. **Il faut placer la proposition ② : « dire Nombre de doubles / 1000 ».** (Le résultat affiché devrait être proche de $\frac{1}{4} = 0{,}25$.)

> ⚠ **Piège.** Si tu places « mettre Nombre de doubles à 0 » dans la boucle, le compteur est remis à zéro à chaque tour et le programme ne compte plus rien : l'initialisation se fait toujours **avant** la boucle.

Conseils pour le jour J

Ce sujet est accessible mais long (cinq exercices, beaucoup de petites questions) : garde environ 25 minutes pour chacun des exercices 1, 4 et 5, qui rapportent le plus. À l'exercice 1, la construction rapporte des points à condition de laisser les arcs de compas visibles ; puis enchaîne dans l'ordre : réciproque de Pythagore (le triangle est rectangle), Thalès (car (KL) // (AB)), puis cosinus, qui n'est utilisable que parce que tu as prouvé l'angle droit.

À l'exercice 4, lis bien ce qu'on te demande : « troisième » signifie le troisième plus petit temps, et la médiane d'une série de 8 valeurs est la moyenne des 4^{e} et 5^{e} valeurs **rangées**. Pour le tableur, commence toujours ta formule par « = » et utilise les références des cellules (C2, D2, E2), jamais leurs valeurs.

En probabilités, le tableau à double entrée des 12 issues est la meilleure arme : il répond d'un coup d'œil aux questions 1 et 2. Pour le Scratch, même si aucune justification n'est demandée, relis mentalement le programme dans l'ordre d'exécution : initialiser avant la boucle, tirer puis tester dans la boucle, afficher la fréquence après.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).