Corrigé – Brevet 2019 – mathématiques – Métropole, Antilles et Guyane

Décomposition en facteurs premiers et partage d'un trésor, Triangle rectangle, aire et triangles semblables, Volume d'un sablier et statistiques de temps d'écoulement, Script Scratch et probabilités d'un dessin, Transformations et aires d'un tableau rectangulaire, Programmes de calcul, calcul littéral et équations

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Décomposition en facteurs premiers et partage d'un trésor *(10 pts)*

1. $69 = 3 \times 23$.
$1\,150 = 2 \times 575 = 2 \times 5 \times 115 = 2 \times 5 \times 5 \times 23 = 2 \times 5^2 \times 23$.
$4\,140 = 2 \times 2\,070 = 2 \times 2 \times 1\,035 = 2^2 \times 5 \times 207 = 2^2 \times 5 \times 9 \times 23 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 23$.
$69 = 3 \times 23$ **;** $1\,150 = 2 \times 5^2 \times 23$ **;** $4\,140 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 23$**.**

2. Le partage est équitable et tout est distribué : le nombre de marins est un diviseur commun de 69, 1 150 et 4 140. D'après les décompositions, le seul facteur premier commun aux trois nombres est 23 : les diviseurs communs sont 1 et 23. Comme le trésor est partagé entre plusieurs marins, **il y a 23 marins.** Chacun reçoit alors $69 \div 23 = 3$ diamants, $1\,150 \div 23 = 50$ perles et $4\,140 \div 23 = 180$ pièces d'or.

Exercice 2 – Triangle rectangle, aire et triangles semblables *(19 pts)*

1. Dans le triangle ADM rectangle en A, le côté [AM] est opposé à l'angle $\widehat{ADM}$ et le côté [AD] lui est adjacent. On utilise la **tangente** : $\tan\widehat{ADM} = \dfrac{AM}{AD}$, soit $\tan 60° = \dfrac{AM}{2}$. D'où $AM = 2 \times \tan 60° = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$. [**AM**] **mesure environ 3,46 m.**

2. La partie non utilisée est le rectangle MBCN, de largeur $MB = AB - AM = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0{,}54$ m et de hauteur $BC = 2$ m : aire $\approx 2 \times (4 - 2\sqrt{3}) = 8 - 4\sqrt{3} \approx 1{,}07$ m². L'aire de la plaque est $4 \times 2 = 8$ m².
Proportion non utilisée : $\dfrac{8 - 4\sqrt{3}}{8} = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}134$. **Environ 0,13 de la plaque (soit 13 %) n'est pas utilisée.** (En calculant avec la valeur arrondie $MB \approx 0{,}54$ m, on trouve $1{,}08 \div 8 = 0{,}135$, du même ordre.)

3. On calcule les angles des trois triangles.
– Triangle AMD : rectangle en A, $\widehat{ADM} = 60°$, donc $\widehat{AMD} = 180° - 90° - 60° = 30°$.
– Triangle PNM : rectangle en P (codage). Comme $(MN) \perp (AB)$ et $(AD) \perp (AB)$, les droites (MN) et (AD) sont parallèles, donc $\widehat{PMN} = \widehat{DMN} = \widehat{ADM} = 60°$ (angles alternes-internes définis par la sécante (DM)). Ses angles sont donc 90°, 60° et 30°.
– Triangle PDN : rectangle en P, et $\widehat{PDN} = \widehat{ADC} - \widehat{ADM} = 90° - 60° = 30°$, donc $\widehat{PND} = 60°$.
Les trois triangles ont des angles de 90°, 60° et 30°. **Si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables** : **les triangles AMD, PNM et PDN sont semblables.**

4. Le coefficient d'agrandissement est le rapport de deux côtés homologues, par exemple les hypoténuses : [DM] pour AMD et [DN] pour PDN.
Dans ADM, $\cos\widehat{ADM} = \dfrac{AD}{DM}$, donc $DM = \dfrac{2}{\cos 60°} = \dfrac{2}{0{,}5} = 4$ m.
AMND est un rectangle (trois angles droits), donc $DN = AM = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ m.
Coefficient $= \dfrac{DM}{DN} = \dfrac{4}{2\sqrt{3}} \approx 1{,}15$. Comme $1{,}15 < 1{,}5$, **oui, le coefficient d'agrandissement (environ 1,15) est bien plus petit que 1,5.**

Exercice 3 – Volume d'un sablier et statistiques de temps d'écoulement *(17 pts)*

1. a) Le rayon de C_2 est $1{,}5 \div 2 = 0{,}75$ cm. Aire de la base : $B = \pi \times 0{,}75^2 = 0{,}5625\pi$ cm². Volume de C_2 : $V = B \times h = 0{,}5625\pi \times 4{,}2 = 2{,}3625\pi \approx 7{,}42$ cm³. Le sable en remplit les deux tiers : $\dfrac{2}{3} \times 2{,}3625\pi = 1{,}575\pi \approx 4{,}948$. **Le volume de sable est bien d'environ 4,95 cm³.**

1. b) Le débit est de 1,98 cm³ par minute : temps $= \dfrac{4{,}95}{1{,}98} = 2{,}5$ min. Or 0,5 min $= 30$ s. **Le sable met 2 min 30 s à s'écouler.**

2. a) $1+1+2+6+3+7+6+3+1+2+3+2+3 = 40$. **40 tests ont été réalisés.**

2. b) On vérifie les trois conditions.
– Étendue : 2 min 38 s $-$ 2 min 22 s $= 16$ s, et $16 < 20$: condition vérifiée.
– Médiane : l'effectif est 40 (pair), la médiane est entre la 20e et la 21e valeur. Effectifs cumulés : 2 min 22 s $\to 1$; 2 min 24 s $\to 2$; 2 min 26 s $\to 4$; 2 min 27 s $\to 10$; 2 min 28 s $\to 13$; 2 min 29 s $\to 20$; 2 min 30 s $\to 26$. La 20e valeur est 2 min 29 s et la 21e est 2 min 30 s : la médiane vaut 2 min 29,5 s, comprise entre 2 min 29 s et 2 min 31 s : condition vérifiée.
– Moyenne : en comptant les secondes au-delà de 2 min, la somme des temps est $22\times1 + 24\times1 + 26\times2 + 27\times6 + 28\times3 + 29\times7 + 30\times6 + 31\times3 + 32\times1 + 33\times2 + 34\times3 + 35\times2 + 38\times3 = 1\,204$ s.
Moyenne $= \dfrac{1\,204}{40} = 30{,}1$ s, soit 2 min 30,1 s, comprise entre 2 min 28 s et 2 min 32 s : condition vérifiée.
Les trois conditions sont remplies : le sablier ne sera pas éliminé, il sera mis en vente.

Exercice 4 – Script Scratch et probabilités d'un dessin *(19 pts)*

1. Le stylo s'oriente vers la droite puis tourne de 90° vers la gauche : il est dirigé vers le haut. La boucle « répéter 4 fois » (avancer de 5, tourner à droite de 90°, avancer de 5) fait parcourir au stylo : 5 pixels vers le haut, puis $5+5$ vers la droite, $5+5$ vers le bas, $5+5$ vers la gauche et enfin 5 vers le haut, retour au point de départ. Le tracé est donc **un carré de 10 pixels de côté, soit 5 cm de côté à l'échelle donnée**, et le point de départ est le **milieu du côté gauche** du carré. Ensuite le stylo est relevé, orienté vers la droite et avance de 10 pixels (5 cm) : il arrive au **milieu du côté droit** du carré, où il se remet en position d'écriture. Sur la figure, on trace un carré de 5 cm de côté, on marque « départ » au milieu du côté gauche et « arrivée » au milieu du côté droit.

2. Le script 1 répète 23 fois « Carré puis Tiret » : les carrés et les tirets alternent régulièrement et l'on obtient 23 carrés séparés par un tiret. C'est le **dessin B**. Le script 2 choisit au hasard, à chacune des 46 répétitions, un carré ou un tiret : la succession est irrégulière (plusieurs carrés ou plusieurs tirets peuvent se suivre). C'est le **dessin A**. **Script 1 $\to$ dessin B ; script 2 $\to$ dessin A.**

3. a) Le nombre aléatoire vaut 1 ou 2 avec la même probabilité, et un carré est tracé lorsqu'il vaut 1. **La probabilité que le premier élément soit un carré est $\dfrac{1}{2}$.**

3. b) Les deux tirages sont indépendants. Les quatre issues (carré-carré, carré-tiret, tiret-carré, tiret-tiret) sont équiprobables, et une seule est favorable : $p = \dfrac{1}{4}$ (soit $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}$). **La probabilité que les deux premiers éléments soient des carrés est $\dfrac{1}{4}$.**

4. Il faut choisir la couleur au hasard avant de tracer chaque élément, donc à l'intérieur de la boucle « répéter 46 fois », juste avant le « si » de la ligne 7 :
si (nombre aléatoire entre 1 et 2) = 1 alors mettre la couleur du stylo à noir, sinon mettre la couleur du stylo à rouge.
Chaque élément a ainsi une chance sur deux d'être noir et une chance sur deux d'être rouge.

Exercice 5 – Transformations et aires d'un tableau rectangulaire *(18 pts)*

1. a) Le rectangle ③ est l'image du rectangle ④ par la translation qui transforme C en E (glissement vertical vers le haut de la longueur CE).

1. b) Le rectangle ③ est l'image du rectangle ① par la rotation de centre F et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre (le rectangle vertical ① devient horizontal, au-dessus et à droite de F).

1. c) Le rectangle ABCD est l'image du rectangle ④ par l'homothétie de centre **C** et de rapport 3 (autres réponses possibles : rectangle ③ avec le centre B, ou rectangle ② avec le centre D).

2. ABCD est l'image d'un petit rectangle par une homothétie de rapport 3, donc son aire est $3^2 = 9$ fois celle d'un petit rectangle. Aire d'un petit rectangle $= \dfrac{1{,}215}{9} = 0{,}135$. **Un petit rectangle a une aire de 0,135 m².**

3. Le ratio longueur : largeur est 3 : 2 : on note $L = 3k$ et $l = 2k$. L'aire est $L \times l = 3k \times 2k = 6k^2 = 1{,}215$, d'où $k^2 = 0{,}2025$ et $k = \sqrt{0{,}2025} = 0{,}45$. Donc $L = 3 \times 0{,}45 = 1{,}35$ et $l = 2 \times 0{,}45 = 0{,}90$. Vérification : $1{,}35 \times 0{,}90 = 1{,}215$. **Le rectangle ABCD mesure 1,35 m de longueur et 0,90 m de largeur.**

Exercice 6 – Programmes de calcul, calcul littéral et équations *(17 pts)*

1. Programme 1 avec 5 : $5 \times 3 = 15$; $15 + 1 = 16$. Programme 2 avec 5 : $5 - 1 = 4$ et $5 + 2 = 7$; $4 \times 7 = 28$. **On obtient bien 16 et 28.**

2. a) Avec x au départ, on multiplie par 3 puis on ajoute 1 : $A(x) = 3x + 1$**.**

2. b) On résout $3x + 1 = 0$: $3x = -1$, donc $x = -\dfrac{1}{3}$. **Il faut choisir $-\dfrac{1}{3}$ au départ pour obtenir 0.**

3. $B(x) = (x - 1)(x + 2) = x^2 + 2x - x - 2$. $B(x) = x^2 + x - 2$**.**

4. a) $B(x) - A(x) = x^2 + x - 2 - (3x + 1) = x^2 + x - 2 - 3x - 1 = x^2 - 2x - 3$. Par ailleurs $(x + 1)(x - 3) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2x - 3$. **On a bien** $B(x) - A(x) = (x + 1)(x - 3)$**.**

4. b) Les deux programmes donnent le même résultat lorsque $B(x) = A(x)$, c'est-à-dire $B(x) - A(x) = 0$, soit $(x + 1)(x - 3) = 0$ d'après la question 4. a. **Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul** : $x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$, donc $x = -1$ ou $x = 3$. Vérification : pour 3, $A(3) = 10$ et $B(3) = 2 \times 5 = 10$; pour -1, $A(-1) = -2$ et $B(-1) = (-2) \times 1 = -2$. **Il faut choisir -1 ou 3 au départ.**

Conseils pour le jour J

Six exercices en deux heures : environ 20 minutes chacun, et l'exercice 1 doit être expédié en 8 minutes. À l'exercice 2, la question 3 est celle qui rapporte le plus : calcule explicitement les trois angles de chaque triangle (90°, 60°, 30°) et cite la propriété des triangles semblables ; pour la question 4, compare deux côtés homologues (les hypoténuses DM = 4 m et DN = AM). Garde la valeur exacte $2\sqrt{3}$ dans les calculs et n'arrondis qu'à la fin. À l'exercice 3, la médiane d'un effectif pair se lit avec les effectifs cumulés (20^{e} et 21^{e} valeurs) ; pour la moyenne, compte uniquement les secondes au-delà de 2 min, cela simplifie énormément. À l'exercice 6, la question 4. b se résout en une ligne grâce à la factorisation de 4. a : ne développe surtout pas à nouveau, le sujet t'a donné la forme factorisée pour cela.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).