Corrigé – Brevet 2018 – mathématiques – Pondichéry

Probabilités sur un plateau tournant, Transformation et aire du motif pied-de-coq, QCM : écriture scientifique, latitude, fractions, Programmes de calcul, tableur et équation, Fléchette, distance et simulation sur Scratch, Lecture graphique, durée et vitesse en VTT, Triangle rectangle, trigonométrie et triangles semblables

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Probabilités sur un plateau tournant *(13 pts)*

Le plateau comporte 13 cases numérotées de 0 à 12 et la boule a la même probabilité de s'arrêter sur chacune d'elles : c'est une situation d'équiprobabilité à 13 issues. La probabilité d'un événement est donc $p = \dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{13}$.

1. Une seule case porte le numéro 8 : il y a 1 issue favorable sur 13. **La probabilité que la boule s'arrête sur la case 8 est $\dfrac{1}{13}$.**

2. Les numéros impairs compris entre 0 et 12 sont 1, 3, 5, 7, 9 et 11, soit 6 issues favorables. **La probabilité d'obtenir un numéro impair est $\dfrac{6}{13}$.**

3. Un nombre premier possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. Entre 0 et 12, les nombres premiers sont 2, 3, 5, 7 et 11 (0 et 1 ne sont pas premiers ; $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$, $8 = 2 \times 4$, $9 = 3 \times 3$, $10 = 2 \times 5$ et $12 = 2 \times 6$ non plus). Il y a donc 5 issues favorables. **La probabilité d'obtenir un nombre premier est $\dfrac{5}{13}$.**

> ⚠ **Piège.** 1 n'est pas un nombre premier (il n'a qu'un seul diviseur), et 9 est impair mais pas premier ($9 = 3 \times 3$). Écris la liste complète des nombres premiers avant de compter.

4. Les lancers sont indépendants : le plateau n'a pas de « mémoire » et les résultats des lancers précédents ne modifient pas les chances au lancer suivant. À chaque lancer, la probabilité de s'arrêter sur la case 9 est $\dfrac{1}{13}$ et celle de s'arrêter sur la case 7 est aussi $\dfrac{1}{13}$. **Non, on n'a pas plus de chances d'obtenir la case 9 que la case 7 : les deux probabilités sont égales à $\dfrac{1}{13}$.**

Exercice 2 – Transformation et aire du motif pied-de-coq *(9 pts)*

1. Sur la figure 1, le motif 2 a la même forme, la même taille et la même orientation que le motif 1 : il s'obtient en le faisant « glisser » vers le haut et vers la droite, sans le tourner ni le retourner. **Le motif 2 est l'image du motif 1 par une translation.**

2. Sur la figure 2, le segment [AB] correspond au côté d'un carreau du quadrillage, donc chaque carreau est un carré de 1 cm de côté, d'aire 1 cm^2. On compte les carreaux contenus dans le motif :

- 4 carreaux entiers : le carré de 2 carreaux sur 2 situé entre les points A, E, H et K ;
- 8 demi-carreaux (carreaux coupés en deux triangles égaux par une diagonale) : 1 le long de [JI], 1 le long de [FG], 2 le long de [LK], 1 le long de [MN], 1 le long de [BC] et 2 le long de [DE].

Les 8 demi-carreaux valent $8 \times \dfrac{1}{2} = 4$ carreaux. L'aire du motif vaut donc $4 + 4 = 8$ carreaux. **L'aire d'un motif pied-de-coq est de** 8 cm^2**.**

> 💡 **Astuce.** Sur un quadrillage, un carreau coupé par sa diagonale donne deux triangles de même aire : chacun vaut la moitié d'un carreau. Compte séparément les carreaux entiers et les demi-carreaux, puis additionne.

3. Quand on multiplie les longueurs d'une figure par un coefficient k, son aire est multipliée par k^2. Diviser les longueurs par 2 revient à les multiplier par $k = \dfrac{1}{2}$, donc l'aire est multipliée par $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$. Exemple : avec AB $= 0{,}5$ cm, chaque carreau a pour aire $0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$ cm^2 et le motif a pour aire $8 \times 0{,}25 = 2$ cm^2, soit $8 \div 4$. **Marie a tort : si les longueurs sont divisées par 2, l'aire est divisée par 4 (et non par 2).**

Exercice 3 – QCM : écriture scientifique, latitude, fractions *(9 pts)*

1. Réponse b. Multiplier par 10^{15} revient à décaler la virgule de 15 rangs vers la droite : $2{,}53 \times 10^{15} = 2\,530\,000\,000\,000\,000$ (le chiffre 2 suivi de 15 chiffres, soit un nombre de 16 chiffres). La réponse c vaut $2{,}53 \times 10^{17}$, la réponse a vaut seulement 2,53 et la réponse d correspond à $2{,}53 \times 15$.

2. Réponse a. La latitude mesure l'éloignement d'un point par rapport à l'équateur, vers le nord ou vers le sud : l'équateur est la ligne de référence, de latitude 0°. (90° Nord et 90° Sud sont les latitudes des pôles ; « 90° Est » est une longitude.)

3. Réponse a. On calcule d'abord le numérateur en réduisant au même dénominateur : $\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{4}{6} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$. Puis on divise par 7, c'est-à-dire on multiplie par $\dfrac{1}{7}$: $\dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{3}{14}$. Donc $\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}}{7} = \dfrac{3}{14}$.

> ⚠ **Piège.** La réponse c (0,214 285 714) n'est qu'une valeur approchée de $\dfrac{3}{14}$: l'écriture décimale de $\dfrac{3}{14}$ ne s'arrête pas ($0{,}2142857142857\ldots$). Comme le signe « = » exige une égalité exacte, seule la réponse a convient.

Exercice 4 – Programmes de calcul, tableur et équation *(18 pts)*

1. Avec le programme A et le nombre 1 :
– on soustrait 3 : $1 - 3 = -2$;
– on calcule le carré du résultat : $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$.
Le résultat du programme A est bien 4.

2. Avec le programme B et le nombre -5 :
– carré du nombre : $(-5)^2 = 25$;
– on ajoute le triple du nombre de départ : $25 + 3 \times (-5) = 25 - 15 = 10$;
– on ajoute 7 : $10 + 7 = 17$.
Tidjane obtient 17.

3. Le programme B appliqué au nombre de la cellule B1 donne : carré de B1, plus 3 fois B1, plus 7. La formule saisie en B3 est donc **=B1^2+3*B1+7** (ou =B1*B1+3*B1+7). Recopiée vers la droite, elle devient =C1^2+3*C1+7, etc. Vérification avec le tableau : pour -3, $(-3)^2 + 3 \times (-3) + 7 = 9 - 9 + 7 = 7$; pour 3, $9 + 9 + 7 = 25$, ce qui correspond aux valeurs affichées en B3 et H3.

4. a) Avec le nombre x, le programme A donne : $x - 3$, puis $(x - 3)^2$. On développe à l'aide de l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:
$(x - 3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$.
Le résultat du programme A s'écrit bien $x^2 - 6x + 9$.

4. b) Avec le nombre x, le programme B donne : x^2, puis $x^2 + 3x$, puis $x^2 + 3x + 7$. **Le résultat du programme B est $x^2 + 3x + 7$.**

4. c) On cherche x tel que les deux résultats soient égaux :
$x^2 - 6x + 9 = x^2 + 3x + 7$

$-6x + 9 = 3x + 7$ (on soustrait x^2 des deux côtés)
$9 - 7 = 3x + 6x$
$2 = 9x$
$x = \dfrac{2}{9}$.
Vérification : programme A, $\left(\dfrac{2}{9} - 3\right)^2 = \left(-\dfrac{25}{9}\right)^2 = \dfrac{625}{81}$; programme B, $\dfrac{4}{81} + \dfrac{6}{9} + 7 = \dfrac{4}{81} + \dfrac{54}{81} + \dfrac{567}{81} = \dfrac{625}{81}$. **Oui : le nombre de départ $\dfrac{2}{9}$ donne le même résultat avec les deux programmes (à savoir $\dfrac{625}{81}$).**

> 💡 **Astuce.** Le tableau de Lina ne montre aucune colonne où les deux résultats sont égaux : c'est normal, la solution $\dfrac{2}{9} \approx 0{,}22$ n'est pas un nombre entier. Les x^2 s'éliminent : l'équation devient une simple équation du premier degré.

Exercice 5 – Fléchette, distance et simulation sur Scratch *(20 pts)*

1. Le point H a pour coordonnées (72 ; 0) : c'est le pied de la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par F. Le triangle OHF est rectangle en H, avec OH = 72 et HF = 54. D'après le **théorème de Pythagore** : $OF^2 = OH^2 + HF^2 = 72^2 + 54^2 = 5\,184 + 2\,916 = 8\,100$, donc $OF = \sqrt{8\,100} = 90$.
La distance OF est bien égale à 90 mm.

2. La cible est un disque de centre O et de rayon 100, et une fléchette posée sur le bord ne compte pas. La fléchette atteint donc la cible lorsque son point F est strictement à l'intérieur du disque, c'est-à-dire lorsque OF < 100. **La distance OF ne doit pas dépasser 100 mm (et doit même être strictement inférieure à 100).**

3. a) La boucle « répéter 120 fois » (ligne 3) exécute une fois le lancer à chaque tour. **Le programme simule 120 lancers.**

3. b) La variable score est mise à 0 au départ (ligne 2), puis augmente de 1 (ligne 8) chaque fois que la condition de la ligne 7 est vraie, c'est-à-dire chaque fois que la fléchette atteint la cible. **La variable score compte le nombre de lancers qui ont atteint la cible.**

3. c) D'après le théorème de Pythagore (comme à la question 1), $OF^2 = x^2 + y^2$ et $OF = \sqrt{x^2 + y^2}$. Les lignes complétées sont :

- **ligne 5 :** mettre carré de OF à ((abscisse x) × (abscisse x)) + ((ordonnée y) × (ordonnée y)) ;
- **ligne 6 :** mettre distance à (racine de (carré de OF)) ;
- **ligne 7 :** si (distance) < (100) alors.

La ligne 5 calcule $x^2 + y^2$ à partir des coordonnées du point où le lutin a été envoyé à la ligne 4, la ligne 6 en prend la racine carrée pour obtenir la distance OF, et la ligne 7 teste si cette distance est strictement inférieure au rayon 100.

> ⚠ **Piège.** À la ligne 5, il faut additionner le carré de l'abscisse et le carré de l'**ordonnée** : écrire « abscisse x » une seconde fois fausserait tout le programme. À la ligne 7, le comparateur est « < » et non « ≤ », car le bord de la cible ne compte pas.

3. d) La fréquence est le quotient du nombre de lancers réussis par le nombre total de lancers : $f = \dfrac{102}{120}$. On simplifie par 6 (PGCD de 102 et 120) : $\dfrac{102}{120} = \dfrac{102 \div 6}{120 \div 6} = \dfrac{17}{20}$, fraction irréductible car 17 est premier et ne divise pas 20. **La cible a été atteinte avec une fréquence de $\dfrac{17}{20}$** (soit 0,85 ou 85 % des lancers).

4. Aire de la cible (disque de rayon 100) : $\pi \times 100^2 = 10\,000\pi$ mm^2. Aire de la plaque (carré de côté 200) : $200^2 = 40\,000$ mm^2. Donc
$p = \dfrac{10\,000\pi}{40\,000} = \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}785$.
La probabilité d'atteindre la cible vaut environ 0,79 (au centième près). On remarque que la fréquence observée en 3. d), 0,85, est assez proche de cette probabilité.

Exercice 6 – Lecture graphique, durée et vitesse en VTT *(15 pts)*

1. Le départ correspond à l'abscisse 0 min. Le point de la courbe d'abscisse 0 a pour ordonnée un peu plus de 50. **Au départ, la fréquence cardiaque de Chris est d'environ 52 battements par minute.**

2. Le point le plus haut de la courbe est atteint vers 29 minutes, à la hauteur de la graduation 160. **La fréquence cardiaque maximale atteinte est d'environ 160 battements par minute.**

3. De 9 h 33 à 10 h 00, il s'écoule 27 min ; de 10 h 00 à 10 h 26, il s'écoule 26 min. Au total : $27 + 26 = 53$. **La course a duré 53 minutes** (ce qui correspond bien à la fin du graphique, vers 53 min).

4. 53 min correspondent à $\dfrac{53}{60}$ h. La vitesse moyenne est $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{11}{\frac{53}{60}} = \dfrac{11 \times 60}{53} = \dfrac{660}{53} \approx 12{,}45$ km/h. **La vitesse moyenne de Chris est bien d'environ 12,5 km/h.**

> ⚠ **Piège.** 53 min ne font pas 0,53 h ! Pour passer des minutes aux heures, divise par 60 : 53 min $= \dfrac{53}{60}$ h $\approx 0{,}883$ h.

5. Un effort soutenu correspond à une fréquence cardiaque comprise entre 70 % et 85 % de la FCM :
– $190 \times 0{,}70 = 133$ battements par minute ;
– $190 \times 0{,}85 = 161{,}5$ battements par minute.
On cherche donc sur le graphique la période pendant laquelle la courbe est comprise entre 133 et 161,5. La courbe dépasse 133 en montant vers 8,5 min et repasse sous 133 en descendant vers 40,5 min. Entre ces deux instants, elle reste toujours entre 133 et 161,5 : son point le plus bas est vers 135 (vers 34 min) et son point le plus haut vers 160 (vers 29 min). La durée est donc d'environ $40{,}5 - 8{,}5 = 32$ min. **Chris a fourni un effort soutenu pendant environ 32 minutes** (une estimation entre 31 et 33 minutes, par exemple de 9 min à 41 min, est acceptable).

Exercice 7 – Triangle rectangle, trigonométrie et triangles semblables *(16 pts)*

1. Construction en vraie grandeur :

- tracer le segment [AB] de longueur 7 cm ;
- tracer en A la perpendiculaire à (AB) (à l'équerre) ;
- au rapporteur, tracer en B la demi-droite qui fait un angle de 30° avec [BA] ; elle coupe la perpendiculaire en C ;
- à l'équerre, tracer la perpendiculaire à (BC) passant par A ; elle coupe [BC] en H.

Contrôle : on doit mesurer AC ≈ 4 cm ($7 \times \tan 30^\circ \approx 4{,}04$ cm), BC $\approx 8{,}1$ cm et AH $\approx 3{,}5$ cm.

2. H est le pied de la hauteur issue de A, donc le triangle ABH est rectangle en H. Comme H appartient au segment [BC], l'angle $\widehat{ABH}$ est égal à l'angle $\widehat{ABC}$, soit 30°. Dans le triangle ABH rectangle en H, [AB] est l'hypoténuse et [AH] le côté opposé à l'angle $\widehat{ABH}$. Par définition du **sinus** :
$\sin \widehat{ABH} = \dfrac{AH}{AB}$, donc $AH = AB \times \sin 30^\circ = 7 \times 0{,}5 = 3{,}5$.
On a bien AH = 3,5 cm.

3. Dans le triangle ABC, rectangle en A, la somme des angles vaut 180°, donc $\widehat{ACB} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Dans le triangle HAC, rectangle en H : l'angle en C est le même que dans le triangle ABC (car H est sur [BC]), donc $\widehat{HCA} = 60^\circ$; par conséquent $\widehat{HAC} = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.
Les deux triangles ont donc les mêmes angles : 90°, 30° et 60°. Or deux triangles qui ont leurs angles deux à deux égaux sont semblables. **Les triangles ABC et HAC sont semblables.**

> 💡 **Astuce.** Pour prouver que deux triangles sont semblables, il suffit de trouver **deux** paires d'angles égaux (le troisième angle est alors forcément égal aussi). Ici, l'angle droit et l'angle commun en C suffisent.

4. Les sommets se correspondent grâce aux angles égaux : A (90°) avec H (90°), B (30°) avec A (30°), C (60°) avec C (60°). Le côté [AB] du triangle ABC correspond donc au côté [HA] du triangle HAC. Le coefficient de réduction est :
$k = \dfrac{HA}{AB} = \dfrac{3{,}5}{7} = 0{,}5$.
Vérification avec un autre couple de côtés homologues : $\dfrac{AC}{BC} = \sin 30^\circ = 0{,}5$. **Le coefficient de réduction permettant de passer du triangle ABC au triangle HAC est $\dfrac{1}{2}$ (soit 0,5).**

Conseils pour le jour J

Ce sujet comporte sept exercices assez courts : garde environ 15 minutes par exercice et commence par ceux qui te rassurent (probabilités, QCM, programmes de calcul). Les points faciles sont nombreux, mais les pièges aussi : 1 n'est pas premier, 0,214 285 714 n'est pas égal à $\dfrac{3}{14}$, 53 min ne font pas 0,53 h, et diviser les longueurs par 2 divise l'aire par 4.

Rédige toujours une phrase de conclusion et nomme tes outils : « théorème de Pythagore » pour la distance OF, « sinus » pour AH, « deux angles égaux » pour les triangles semblables. Pour le programme Scratch, recopie proprement les trois lignes demandées (5, 6 et 7) et n'oublie pas l'ordonnée y à la ligne 5.

À l'exercice 6, les réponses sont des lectures graphiques : écris « environ » et montre ta démarche à la question 5 (calcul des bornes 133 et 161,5, puis repérage sur la courbe des instants où elle franchit 133). Une estimation raisonnable et bien justifiée rapporte tous les points.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).