Corrigé – Brevet 2018 – mathématiques – Métropole, Antilles et Guyane

Volume d'une boule et d'un cylindre, trophée de ski, Statistiques sur la pollution aux particules fines, Probabilités sur un lecteur de musique aléatoire, Triangles rectangles et triangles semblables, Programme de calcul, calcul littéral et équations, Programme Scratch, homothétie et rapport d'aires, Fonction affine et lecture graphique d'une vitesse

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Volume d'une boule et d'un cylindre, trophée de ski *(11 pts)*

1. Sur la carte, Pyeongchang se situe entre les parallèles 30° et 40° Nord, un peu au-dessus de 35°, et près du méridien 120° Est, un peu plus à l'est. **Latitude : environ 37° Nord ; longitude : environ 128° Est** (toute lecture voisine, par exemple 38° N et 125° E, est acceptée).

2. La boule a un diamètre de 23 cm, donc un rayon $R = 11{,}5$ cm. $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 11{,}5^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 1\,520{,}875 \approx 6\,370{,}6$. **Le volume de la boule est bien d'environ 6 371 cm³.**

3. Le cylindre a un rayon $r = 6 \div 2 = 3$ cm et une hauteur $h = 23$ cm : $V = \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 23 = 207\pi \approx 650{,}3$ cm³. Volume total du trophée : $6\,371 + 650{,}3 \approx 7\,021{,}3$ cm³. Proportion de la boule : $\dfrac{6\,371}{7\,021{,}3} \approx 0{,}907$, soit environ 91 %. **Marie a raison : la boule représente environ 90 % du volume total.**

Exercice 2 – Statistiques sur la pollution aux particules fines *(14 pts)*

1. Moyenne à Grenoble : $\dfrac{32+39+52+57+78+63+60+82+82+89}{10} = \dfrac{634}{10} = 63{,}4$ µg/m³. La moyenne à Lyon est 72,5 µg/m³. Comme $72{,}5 > 63{,}4$, **c'est Lyon qui a eu la plus forte concentration moyenne.**

2. Étendue à Grenoble : $89 - 32 = 57$ µg/m³. Étendue à Lyon : $107 - 22 = 85$ µg/m³. **Lyon a l'étendue la plus importante.** Cela signifie que les concentrations ont beaucoup plus varié à Lyon d'un jour à l'autre (l'écart entre le jour le moins pollué et le jour le plus pollué y est plus grand) : la pollution y a été plus irrégulière qu'à Grenoble.

3. À Lyon, la médiane vaut 83,5 µg/m³ sur 10 relevés. Par définition, au moins la moitié des valeurs, soit au moins 5 relevés, sont supérieures ou égales à la médiane, donc supérieures ou égales à 83,5, qui dépasse 80. **L'affirmation est exacte : le seuil de 80 µg/m³ a été dépassé au moins 5 fois à Lyon.**

Exercice 3 – Probabilités sur un lecteur de musique aléatoire *(12 pts)*

1. Les 375 morceaux sont équiprobables et 125 sont du rap : $p = \dfrac{125}{375} = \dfrac{1}{3}$. **La probabilité d'écouter du rap est $\dfrac{1}{3}$.**

2. Si n est le nombre de morceaux de rock, $\dfrac{n}{375} = \dfrac{7}{15}$, donc $n = \dfrac{7 \times 375}{15} = 7 \times 25 = 175$. **Théo a 175 morceaux de rock.**

3. Pour Théo, la probabilité d'écouter du rock est $\dfrac{7}{15} \approx 0{,}467$, soit environ 46,7 %. Pour Alice, elle est de 40 % $= 0{,}4$. Comme $0{,}467 > 0{,}4$, **c'est Théo qui a le plus de chances d'écouter un morceau de rock.**

Exercice 4 – Triangles rectangles et triangles semblables *(14 pts)*

1. Le triangle BDC est rectangle en B, son hypoténuse est [CD]. D'après le **théorème de Pythagore** : $CD^2 = CB^2 + BD^2$, soit $8{,}5^2 = 7{,}5^2 + BD^2$. D'où $BD^2 = 72{,}25 - 56{,}25 = 16$ et $BD = \sqrt{16} = 4$. **BD = 4 cm.**

2. On compare les longueurs des côtés des deux triangles, rangées dans l'ordre croissant : pour CBD, $BD = 4$, $CB = 7{,}5$, $CD = 8{,}5$; pour BFE, $FE = 3{,}2$, $BF = 6$, $BE = 6{,}8$.
$\dfrac{FE}{BD} = \dfrac{3{,}2}{4} = 0{,}8$; $\dfrac{BF}{CB} = \dfrac{6}{7{,}5} = 0{,}8$; $\dfrac{BE}{CD} = \dfrac{6{,}8}{8{,}5} = 0{,}8$.
Les longueurs des côtés sont proportionnelles (coefficient 0,8). **Si les longueurs des côtés de deux triangles sont deux à deux proportionnelles, alors ces triangles sont semblables : les triangles CBD et BFE sont semblables.**

3. Dans des triangles semblables, les angles homologues sont égaux. L'angle $\widehat{BFE}$ est compris entre les côtés [FB] et [FE], homologues de [BC] et [BD] : il est donc égal à l'angle $\widehat{CBD}$, qui est droit. **Sophie a raison, $\widehat{BFE} = 90°$.** (On peut le vérifier avec la réciproque de Pythagore : $6{,}8^2 = 46{,}24$ et $6^2 + 3{,}2^2 = 36 + 10{,}24 = 46{,}24$.)

4. L'angle $\widehat{ACD}$ est la somme de $\widehat{ACB} = 61°$ et de $\widehat{BCD}$. Dans le triangle BDC rectangle en B, $\tan\widehat{BCD} = \dfrac{BD}{CB} = \dfrac{4}{7{,}5}$, donc $\widehat{BCD} = \arctan\left(\dfrac{4}{7{,}5}\right) \approx 28{,}1°$. Ainsi $\widehat{ACD} \approx 61° + 28{,}1° = 89{,}1°$. **Max a tort : l'angle $\widehat{ACD}$ mesure environ 89°, ce n'est pas un angle droit** (même s'il en est très proche).

Exercice 5 – Programme de calcul, calcul littéral et équations *(16 pts)*

1. Avec -1 : $-1 \times 4 = -4$; $-4 + 8 = 4$; $4 \times 2 = 8$. **Le résultat final est bien 8.**

2. On remonte le programme à l'envers : avant de multiplier par 2, on avait $30 \div 2 = 15$; avant d'ajouter 8, on avait $15 - 8 = 7$; avant de multiplier par 4, on avait $7 \div 4 = 1{,}75$. (Par l'équation : $2(4x + 8) = 30 \Leftrightarrow 4x + 8 = 15 \Leftrightarrow 4x = 7 \Leftrightarrow x = 1{,}75$.) **Le nombre choisi au départ est 1,75.**

3. On développe les deux expressions. $A = 2(4x + 8) = 8x + 16$. Pour B, on utilise l'identité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$: $B = (4 + x)^2 - x^2 = 16 + 8x + x^2 - x^2 = 8x + 16$. **Les expressions A et B sont égales à $8x + 16$ pour toutes les valeurs de x.**

4. Affirmation 1 : FAUSSE. Il suffit d'un contre-exemple : pour $x = -3$, le résultat est $2 \times (4 \times (-3) + 8) = 2 \times (-4) = -8$, qui est négatif. (Le résultat $8x + 16$ est négatif dès que $x < -2$.)

4. Affirmation 2 : VRAIE. Le résultat vaut $8x + 16 = 8(x + 2)$. Si x est un nombre entier, alors $x + 2$ est aussi un entier, et $8(x + 2)$ est le produit de 8 par un entier : c'est un multiple de 8.

Exercice 6 – Programme Scratch, homothétie et rapport d'aires *(16 pts)*

1. a) Le stylo part de l'origine $(0\ ;\ 0)$, orienté vers la droite, avec Longueur $= 300$ pixels, soit 6 cm à l'échelle donnée. Le bloc « Carré » répète 4 fois « avancer de 300, tourner de 90° vers la gauche » : il trace un **carré de 6 cm de côté**, dont le côté inférieur va de $(0\ ;\ 0)$ à $(300\ ;\ 0)$ et qui s'élève au-dessus de ce côté ; le stylo revient à l'origine, orienté vers la droite. Le bloc « Triangle » répète 3 fois « avancer de 300, tourner de 120° vers la gauche » : il trace un **triangle équilatéral de 6 cm de côté**, de même côté inférieur $[(0\ ;\ 0)\ ;\ (300\ ;\ 0)]$, dont le sommet est à l'intérieur du carré (hauteur $\approx 5{,}2$ cm), et le stylo revient à l'origine. Sur la copie, on dessine un carré de 6 cm de côté et le triangle équilatéral construit sur son côté du bas, à l'intérieur.

1. b) Ligne 8 : le stylo, orienté vers la droite, avance de $300 \div 6 = 50$ pixels. **Ses coordonnées sont alors $(50\ ;\ 0)$.**

2. Sur la figure finale, le petit carré et le petit triangle partent de $(50\ ;\ 0)$ et la figure est symétrique par rapport à l'axe vertical passant par le milieu du grand carré (abscisse 150). Le petit carré doit donc s'arrêter à l'abscisse $300 - 50 = 250$: son côté mesure $250 - 50 = 200$ pixels. **Ligne 9 : mettre Longueur à 200** (ou « Longueur − 100 », ou « Longueur × 2 / 3 »).

3. a) Le petit carré est une réduction du grand carré, de même orientation : c'est l'image du grand carré par une **homothétie**, de rapport $\dfrac{200}{300} = \dfrac{2}{3}$; son centre est le milieu du côté inférieur du grand carré, le point $(150\ ;\ 0)$. **Le rapport de réduction est $\dfrac{2}{3}$.**

3. b) Dans une réduction de rapport k, les aires sont multipliées par k^2 : le rapport des aires est $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$.
Vérification : $\dfrac{200^2}{300^2} = \dfrac{40\,000}{90\,000} = \dfrac{4}{9}$. **L'aire du petit carré est égale aux $\dfrac{4}{9}$ de celle du grand carré.**

Exercice 7 – Fonction affine et lecture graphique d'une vitesse *(17 pts)*

1. La représentation graphique est une droite, mais elle ne passe pas par l'origine du repère (à $t = 0$, la vitesse vaut 20 et non 0). **Le temps et la vitesse de rotation ne sont pas proportionnels.** (Autre argument : la vitesse diminue quand le temps augmente, alors que deux grandeurs proportionnelles varient dans le même sens.)

2. a) À $t = 0$, la droite coupe l'axe des ordonnées en 20 : **la vitesse initiale est de 20 tours par seconde.**

2. b) 1 min 20 s = 80 s. Pour l'abscisse 80, la droite est à l'ordonnée 3 environ : **la vitesse est d'environ 3 tours par seconde.**

2. c) Le hand-spinner s'arrête lorsque la vitesse est nulle, c'est-à-dire lorsque la droite coupe l'axe des abscisses, vers $t \approx 93$ s. **Il s'arrête au bout d'environ 93 s (un peu plus d'1 min 30 s).**

3. a) $V(30) = -0{,}214 \times 30 + 20 = -6{,}42 + 20 = 13{,}58$. **Au bout de 30 s, la vitesse est de 13,58 tours par seconde.**

3. b) Le hand-spinner s'arrête lorsque $V(t) = 0$: $-0{,}214t + 20 = 0$, soit $0{,}214t = 20$ et $t = \dfrac{20}{0{,}214} \approx 93{,}5$. **Il s'arrête au bout d'environ 93 s**, ce qui confirme la lecture graphique.

3. c) Avec une vitesse initiale V_{initiale}, le hand-spinner s'arrête lorsque $-0{,}214t + V_{\text{initiale}} = 0$, soit au temps $t = \dfrac{V_{\text{initiale}}}{0{,}214}$. Ce temps est proportionnel à la vitesse initiale (on la divise toujours par le même nombre 0,214) : si l'on double V_{initiale}, on double le temps de rotation. Exemple : pour 40 tours par seconde, $t = \dfrac{40}{0{,}214} \approx 187$ s, soit le double de 93,5 s. **Oui, l'affirmation est vraie.**

Conseils pour le jour J

Sept exercices courts : ne reste jamais bloqué plus de quelques minutes, tout se rattrape ailleurs. À l'exercice 2, la question 3 se résout avec la seule définition de la médiane (au moins la moitié des valeurs lui sont supérieures ou égales), sans connaître les relevés de Lyon : c'est ce raisonnement qui est noté. À l'exercice 4, pour prouver que deux triangles sont semblables avec trois longueurs, calcule les trois rapports de côtés rangés dans le même ordre, et pour la question 4 n'arrondis pas $89{,}1^\circ$ à 90° : le sujet teste justement cette précision. À l'exercice 5, une affirmation « pour toutes les valeurs » se réfute par un seul contre-exemple, mais se prouve par une factorisation ($8(x+2)$). Enfin, à l'exercice 7, la question 3. c attend un argument général (le temps d'arrêt est $V_{\text{initiale}} \div 0{,}214$), pas seulement un exemple numérique.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).