Corrigé – Brevet 2016 – mathématiques – Polynésie

Probabilités avec un jeu de grattage, Programme de calcul et calcul littéral, Théorème des milieux, Pythagore, trigonométrie et cercle, Vitesses moyennes et tableur, Pyramide découpée dans un cube : patron et volume, Comparer deux voitures : proportionnalité et budget, Fractions et superficie de la Terre

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Probabilités avec un jeu de grattage *(6 pts)*

1. a) Le ticket est prélevé au hasard : les 750 000 tickets du lot sont équiprobables. D'après le tableau, 83 000 tickets ont un « montant du gain » de 4 €. La probabilité cherchée est donc $p = \dfrac{83\,000}{750\,000} = \dfrac{83}{750} \approx 0{,}111$. **La probabilité d'obtenir un ticket gagnant de 4 € est $\dfrac{83}{750} \approx 0{,}11$.**

1. b) Les tickets perdants (gain de 0 €) sont au nombre de 532 173. Le nombre de tickets gagnants est donc $750\,000 - 532\,173 = 217\,827$.
Vérification en additionnant les lignes « tickets gagnants » : $100\,000 + 83\,000 + 20\,860 + 5\,400 + 8\,150 + 400 + 15 + 2 = 217\,827$.
$p = \dfrac{217\,827}{750\,000} \approx 0{,}29$. **La probabilité d'obtenir un ticket gagnant est $\dfrac{217\,827}{750\,000} \approx 0{,}29$, soit environ 29 %.**

1. c) Les tickets dont le gain est supérieur ou égal à 10 € sont ceux de 12 €, 20 €, 150 €, 1 000 € et 15 000 € : $5\,400 + 8\,150 + 400 + 15 + 2 = 13\,967$ tickets.
$p = \dfrac{13\,967}{750\,000} \approx 0{,}0186$, soit environ 1,86 %. Comme $1{,}86\ \% < 2\ \%$, **on a bien moins de 2 % de chances d'obtenir un ticket dont le gain est supérieur ou égal à 10 €.**

> ⚠ **Piège.** « Supérieur ou égal à 10 € » commence à la ligne 12 € : il n'y a pas de ligne 10 €. N'inclus surtout pas les tickets de 6 €.

2. Acheter un lot complet coûte $750\,000 \times 2 = 1\,500\,000$ €.
Le total des gains du lot est :
$100\,000 \times 2 + 83\,000 \times 4 + 20\,860 \times 6 + 5\,400 \times 12 + 8\,150 \times 20 + 400 \times 150 + 15 \times 1\,000 + 2 \times 15\,000$
$= 200\,000 + 332\,000 + 125\,160 + 64\,800 + 163\,000 + 60\,000 + 15\,000 + 30\,000 = 989\,960$ €.
Le lot rapporte 989 960 € alors qu'il coûte 1 500 000 € : Tom perdrait $1\,500\,000 - 989\,960 = 510\,040$ €. **Tom a tort : en achetant un lot complet, il perdrait 510 040 €.**

Exercice 2 – Programme de calcul et calcul littéral *(6 pts)*

1. On part de 3. On ajoute 1 : $3 + 1 = 4$. On calcule le carré : $4^2 = 16$. On enlève le carré du nombre de départ : $16 - 3^2 = 16 - 9 = 7$. **On obtient bien 7.**

2. a) Avec 8 : $8 + 1 = 9$; $9^2 = 81$; $81 - 8^2 = 81 - 64 = 17$. Le chiffre des unités de 17 est 7, et $8 + 9 = 17$: les deux affirmations sont vraies pour 8.
Avec 13 : $13 + 1 = 14$; $14^2 = 196$; $196 - 13^2 = 196 - 169 = 27$. Le chiffre des unités de 27 est 7, et $13 + 14 = 27$: les deux affirmations sont vraies pour 13.
Les deux affirmations sont vérifiées pour 8 (résultat 17) et pour 13 (résultat 27).

2. b) Affirmation n° 1 : fausse. Contre-exemple avec le nombre 1 : $1 + 1 = 2$; $2^2 = 4$; $4 - 1^2 = 3$. Le résultat 3 n'a pas 7 pour chiffre des unités. Un seul contre-exemple suffit à prouver qu'une affirmation est fausse.

Affirmation n° 2 : vraie. Notons n le nombre entier de départ. Le programme donne $(n+1)^2 - n^2$. On développe avec l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:
$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$.
Or le nombre entier qui suit n est $n+1$, et $n + (n+1) = 2n + 1$. Le résultat est donc toujours égal à la somme du nombre de départ et de son suivant. **L'affirmation n° 2 est vraie quel que soit le nombre choisi.**

> 💡 **Astuce.** Pour prouver qu'une propriété est vraie « quel que soit le nombre », il faut un calcul avec une lettre ; des exemples ne suffisent jamais. Pour prouver qu'elle est fausse, un seul contre-exemple suffit.

Exercice 3 – Théorème des milieux, Pythagore, trigonométrie et cercle *(6 pts)*

1. Dans le triangle ABE, I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AE]. D'après le **théorème des milieux** (la droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté), **les droites (IJ) et (BE) sont parallèles.**

2. Le plus grand côté du triangle ABE est [BE].
D'une part : $BE^2 = 10^2 = 100$.
D'autre part : $AB^2 + AE^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.
On a $BE^2 = AB^2 + AE^2$, donc d'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, **le triangle ABE est rectangle en A.**

3. Dans le triangle ABE rectangle en A, pour l'angle $\widehat{AEB}$, le côté [AE] est adjacent et [BE] est l'hypoténuse. On utilise le **cosinus** :
$\cos\widehat{AEB} = \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$, d'où $\widehat{AEB} = \arccos(0{,}8) \approx 36{,}87°$.
Vérification avec la tangente : $\tan\widehat{AEB} = \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{6}{8} = 0{,}75$ et $\arctan(0{,}75) \approx 36{,}87°$. **L'angle $\widehat{AEB}$ mesure environ $37°$.**

4. a) I appartient à [AB] et J à [AE], donc $\widehat{IAJ} = \widehat{BAE} = 90°$: le triangle AIJ est rectangle en A. Le cercle (C) passe par A, I et J : c'est le cercle circonscrit au triangle AIJ. Or **le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse**. L'hypoténuse de AIJ étant [IJ], **le centre du cercle (C) est le milieu du segment [IJ].**

4. b) D'après le théorème des milieux, le segment qui joint les milieux de deux côtés mesure la moitié du troisième côté : $IJ = \dfrac{BE}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ cm.
(Vérification avec Pythagore dans AIJ rectangle en A : $AI = 3$ cm, $AJ = 4$ cm, $IJ^2 = 9 + 16 = 25$, donc $IJ = 5$ cm.)
Le rayon est la moitié du diamètre [IJ] : $r = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$ cm. **Le rayon du cercle (C) mesure 2,5 cm.**

Exercice 4 – Vitesses moyennes et tableur *(7 pts)*

1. D'après le tableau, **David a parcouru 42 km.**

2. La vitesse moyenne se calcule par $v = \dfrac{d}{t}$.
David : $v = \dfrac{42}{3} = 14$ km/h.
Gwenn : 1 h 30 min = 1,5 h, donc $v = \dfrac{27}{1{,}5} = 18$ km/h.
La vitesse moyenne de David est 14 km/h et celle de Gwenn est 18 km/h.

3. a) Yassin a mis 1 h 45 min. Or 45 min $= \dfrac{45}{60}$ h $= 0{,}75$ h. **Il doit saisir 1,75 dans la cellule E3.**

3. b) Zoé a mis 1 h 36 min et 36 min $= \dfrac{36}{60}$ h $= 0{,}6$ h. Sa durée est donc $1 + 0{,}6 = 1{,}6$ h. **C'est pourquoi il doit saisir 1,6 dans la cellule F3** (et non 1,36, car une heure compte 60 minutes et pas 100).

3. c) La vitesse est la distance (ligne 2) divisée par la durée (ligne 3). **Dans la cellule B4, il peut saisir la formule =B2/B3**, puis l'étirer vers la droite jusqu'à F4. (Vérification : $35 \div 2 = 17{,}5$, valeur déjà présente pour Alix.)

> ⚠ **Piège.** Une durée en heures et minutes ne s'écrit pas directement en décimal : 1 h 36 min fait 1,6 h, pas 1,36 h. Divise toujours les minutes par 60.

4. De $v = \dfrac{d}{t}$, on tire $t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{35}{25} = 1{,}4$ h.
Or $0{,}4$ h $= 0{,}4 \times 60$ min $= 24$ min.
Vérification : en 1 h 24 min $= 1{,}4$ h, à 25 km/h, on parcourt $25 \times 1{,}4 = 35$ km. **Stefan a mis 1 h 24 min.**

Exercice 5 – Pyramide découpée dans un cube : patron et volume *(4 pts)*

1. I et K sont les milieux des arêtes [FE] et [FG] du cube de côté 6 cm, donc $FI = FK = \dfrac{6}{2} = 3$ cm. De plus, la face EFGH est un carré, donc l'angle $\widehat{IFK} = \widehat{EFG} = 90°$.
Le triangle IFK est donc **rectangle et isocèle en F**, avec FI = FK = 3 cm. Construction : tracer un segment [FI] de 3 cm, tracer en F la perpendiculaire à (FI) à l'équerre, et placer K sur cette perpendiculaire à 3 cm de F, puis relier I et K. (On peut contrôler : $IK = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} \approx 4{,}2$ cm.)

2. Le patron de la pyramide FIJK est le schéma 3.
(Explication, non exigée : la pyramide a trois faces rectangles isocèles en F (FIJ, FJK, FIK) et une face IJK équilatérale dont les côtés sont les hypoténuses des trois autres. Le schéma 3 montre bien trois triangles rectangles autour d'un même sommet et un triangle équilatéral ; le schéma 1 a quatre triangles rectangles, le schéma 4 plusieurs triangles équilatéraux.)

3. On prend pour base le triangle FIJ, rectangle en F, avec $FI = FJ = 3$ cm : son aire est $\mathcal{A} = \dfrac{FI \times FJ}{2} = \dfrac{3 \times 3}{2} = 4{,}5$ cm².
L'arête [FK] est perpendiculaire à la face ABFE du cube, donc au plan (FIJ) : la hauteur associée à cette base est $FK = 3$ cm.
$V = \dfrac{\mathcal{A} \times h}{3} = \dfrac{4{,}5 \times 3}{3} = 4{,}5$ cm³. **Le volume de la pyramide FIJK est 4,5 cm³.**

Exercice 6 – Comparer deux voitures : proportionnalité et budget *(4 pts)*

1. Pour 22 300 km, la consommation se calcule avec la consommation pour 100 km :

- essence : $\dfrac{22\,300 \times 6{,}2}{100} = 1\,382{,}6 \approx 1\,383$ L, et le budget est $1\,383 \times 1{,}415 = 1\,956{,}945 \approx 1\,957$ € (valeurs déjà données dans le tableau) ;
- diesel : $\dfrac{22\,300 \times 5{,}2}{100} = 1\,159{,}6 \approx 1\,160$ L, et le budget est $1\,160 \times 1{,}224 = 1\,419{,}84 \approx 1\,420$ €.

	Version ESSENCE	**Version DIESEL**
Consommation de carburant (en L)	1 383	**1 160**
Budget de carburant (en €)	1 957	**1 420**

(Sans arrondir le volume : $1\,159{,}6 \times 1{,}224 \approx 1\,419{,}35$ €, soit environ 1 419 € ; les deux réponses sont acceptables si le calcul est écrit.)

2. La version DIESEL coûte plus cher à l'achat : $23\,950 - 21\,550 = 2\,400$ €.
Elle fait économiser chaque année sur le carburant : $1\,957 - 1\,420 = 537$ €.
Nombre d'années nécessaires : $\dfrac{2\,400}{537} \approx 4{,}47$.
Au bout de 4 ans, l'économie n'est que de $4 \times 537 = 2\,148$ € $< 2\,400$ € ; au bout de 5 ans, elle atteint $5 \times 537 = 2\,685$ € $> 2\,400$ €. **L'économie de carburant compensera la différence de prix d'achat au cours de la 5e année, donc au bout de 5 ans.**

Exercice 7 – Fractions et superficie de la Terre *(3 pts)*

1. Les continents occupent $\dfrac{5}{17}$ de la superficie de la Terre ; la superficie restante représente $1 - \dfrac{5}{17} = \dfrac{17}{17} - \dfrac{5}{17} = \dfrac{12}{17}$.
L'océan Pacifique en recouvre la moitié : $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{12}{17} = \dfrac{12}{34} = \dfrac{6}{17}$. **L'océan Pacifique occupe $\dfrac{6}{17}$ de la superficie totale de la Terre.**

2. Notons S la superficie de la Terre. On a $\dfrac{6}{17} \times S = 180\,000\,000$, donc $S = 180\,000\,000 \times \dfrac{17}{6} = 30\,000\,000 \times 17 = 510\,000\,000$.
Vérification : $\dfrac{6}{17} \times 510\,000\,000 = 6 \times 30\,000\,000 = 180\,000\,000$. **La superficie de la Terre est de 510 000 000 km².**

Conseils pour le jour J

Ce sujet comporte sept exercices courts et très variés : lis-les tous en commençant et attaque par ceux qui te semblent les plus sûrs (le programme de calcul, les fractions, les vitesses). Garde un œil sur l'horloge : environ 15 minutes par exercice, un peu plus pour le cube et la voiture.

Les pièges de ce sujet sont surtout des pièges de lecture : « supérieur ou égal à 10 € » dans le tableau des gains, les durées en heures et minutes à convertir en heures décimales (1 h 36 min = 1,6 h), le tableau de la voiture à recopier et compléter sur la copie. Dans l'exercice 6, écris tous tes calculs : la consigne le demande expressément.

Pour le triangle IFK, trace-le soigneusement à la règle et à l'équerre, avec les longueurs exactes (3 cm) : un tracé en vraie grandeur se note sur la précision. Et pour l'affirmation qui est vraie « quel que soit le nombre », seul le calcul avec une lettre rapporte tous les points.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).