Corrigé – Brevet 2015 – mathématiques – Amérique du Sud

QCM : racines, statistiques, fractions et système, Fonctions et tableur, Probabilité et PGCD : les titres du DJ, Trigonométrie, Pythagore et Thalès dans une charpente, Vrai ou faux : identité remarquable et vitesses, Aire et pourcentage : les dalles autour de la piscine, Volume de boules et section d'une sphère, Comparer deux tarifs de train

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – QCM : racines, statistiques, fractions et système *(4 pts)*

Aucune justification n'est attendue ; les explications ci-dessous servent à comprendre.

Question 1. $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 4^2 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = 16 \times 2 = 32$. Or le PGCD de 128 et de 96 vaut aussi 32 (algorithme d'Euclide : $128 = 96 \times 1 + 32$ et $96 = 32 \times 3 + 0$). **Réponse 2 : le PGCD de 128 et de 96.**

Question 2. La série, déjà rangée dans l'ordre croissant, compte 9 valeurs : la médiane est la 5^{e} valeur, soit 12. La moyenne vaut $\dfrac{7+8+8+12+12+14+15+15+41}{9} = \dfrac{132}{9} \approx 14{,}7$. Comme $12 < 14{,}7$, **réponse 2 : la médiane est inférieure à la moyenne de cette série.** (La valeur 41, très éloignée des autres, tire la moyenne vers le haut.)

Question 3. La proportion d'élèves qui ne viennent pas en bus est $1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$, d'où $\left(1 - \dfrac{2}{3}\right) \times 30 = \dfrac{1}{3} \times 30 = 10$ élèves. **Réponse 3 :** $\left(1 - \dfrac{2}{3}\right) \times 30$**.** La proposition 2 est fausse à cause des priorités opératoires : $1 - \dfrac{2}{3} \times 30 = 1 - 20 = -19$.

Question 4. On teste le couple $(3\,;\,5)$: $2 \times 3 + 5 = 11$ et $3 - 3 \times 5 = 3 - 15 = -12$. Les deux équations sont vérifiées. **Réponse 3 : le couple** $(3\,;\,5)$**.** (Pour $(3{,}5\,;\,4)$: $3{,}5 - 12 = -8{,}5 \neq -12$; pour $(-12\,;\,0)$: $2 \times (-12) + 0 = -24 \neq 11$.)

> ⚠ **Piège.** Dans un système, un couple n'est solution que s'il vérifie **les deux** équations. Le couple $(3{,}5\,;\,4)$ vérifie la première mais pas la seconde.

Exercice 2 – Fonctions et tableur *(4 pts)*

1. La cellule B2 doit contenir l'image par f du nombre écrit en B1, c'est-à-dire $-8\times$ B1. **On peut saisir la formule =-8*B1** ; recopiée vers la droite, elle devient =-8*C1, =-8*D1, =-8*E1.

2. La cellule E2 indique que l'image par f du nombre effacé vaut -24. On cherche donc x tel que $-8x = -24$, soit $x = \dfrac{-24}{-8} = 3$. Vérification avec g : $g(3) = -6 \times 3 + 4 = -18 + 4 = -14$, ce qui correspond bien à la cellule E3. **La cellule E1 contenait le nombre 3.**

3. Pour tout nombre x : $h(x) = f(x) \times g(x) = -8x \times (-6x + 4) = 48x^2 - 32x$.
L'expression contient un terme en x^2 : elle ne peut pas s'écrire sous la forme $ax + b$. On peut aussi le vérifier avec des valeurs : $h(0) = 0$, $h(1) = 48 - 32 = 16$ et $h(2) = 192 - 64 = 128$; quand x augmente de 1, $h(x)$ augmente de 16 puis de 112, alors que pour une fonction affine l'augmentation serait toujours la même. **La fonction h n'est pas une fonction affine.**

Exercice 3 – Probabilité et PGCD : les titres du DJ *(4 pts)*

1. Le DJ possède $96 + 104 = 200$ titres, choisis au hasard (situation d'équiprobabilité). Parmi eux, 96 sont des titres de rap : $p = \dfrac{96}{200} = \dfrac{12}{25} = 0{,}48$. **La probabilité que le premier titre soit un titre de rap est $\dfrac{12}{25}$, soit 0,48.**

2. a. Les mix étant identiques et utilisant tous les titres, le nombre de concerts doit diviser à la fois 96 et 104. Le nombre maximum de concerts est donc le PGCD de 96 et de 104.
Algorithme d'Euclide : $104 = 96 \times 1 + 8$, puis $96 = 8 \times 12 + 0$. Le dernier reste non nul est 8, donc $\text{PGCD}\,(96\,;\,104) = 8$. **Le DJ pourra réaliser au maximum 8 concerts différents.**

2. b. $96 \div 8 = 12$ et $104 \div 8 = 13$. **Chaque concert comportera 12 titres de rap et 13 titres d'électro** (soit 25 titres ; vérification : $8 \times 25 = 200$).

Exercice 4 – Trigonométrie, Pythagore et Thalès dans une charpente *(6 pts)*

Données lues sur la figure. Le segment [AB] mesure 9 m et il est partagé par les points H, E, D, F et G en six segments marqués du même codage : $AH = HE = ED = DF = FG = GB = 9 \div 6 = 1{,}5$ m. Par symétrie par rapport à [CD], D est le milieu de [AB], donc $AD = 4{,}5$ m, et $HD = 2 \times 1{,}5 = 3$ m. La poutre [CD] est perpendiculaire à [AB].

1. Le triangle ADC est rectangle en D et l'angle $\widehat{DAC}$ mesure 25°. Dans ce triangle, d'après la trigonométrie : $\tan\widehat{DAC} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{CD}{AD}$.
Donc $CD = AD \times \tan 25^\circ = 4{,}5 \times \tan 25^\circ \approx 2{,}098$ m. **Au centimètre près, CD = 2,10 m** : la dimension du charpentier est exacte.

2. Le triangle ADC est rectangle en D, donc d'après le **théorème de Pythagore** : $AC^2 = AD^2 + CD^2 = 4{,}5^2 + 2{,}10^2 = 20{,}25 + 4{,}41 = 24{,}66$.
Donc $AC = \sqrt{24{,}66} \approx 4{,}966$ m. **Au centimètre près, AC = 4,97 m.** (Avec la valeur non arrondie $CD \approx 2{,}098$ m, on trouve $AC \approx 4{,}965$ m, ce qui donne le même arrondi.)

3. Les points D, H, A sont alignés, ainsi que les points D, I, C, et les droites (HI) et (AC) sont parallèles.
D'après le **théorème de Thalès** dans les triangles DHI et DAC : $\dfrac{DH}{DA} = \dfrac{DI}{DC} = \dfrac{HI}{AC}$.
Donc $\dfrac{3}{4{,}5} = \dfrac{DI}{2{,}10}$, d'où $DI = \dfrac{3 \times 2{,}10}{4{,}5} = \dfrac{6{,}3}{4{,}5} = 1{,}4$. **DI = 1,40 m.**

4. Deux démarches possibles (non rédigées, comme demandé) :

- **Méthode 1 (trigonométrie).** Les droites (HI) et (AC) sont parallèles et coupées par la sécante (AB) : les angles correspondants $\widehat{DHI}$ et $\widehat{DAC}$ sont égaux, donc $\widehat{DHJ} = 25^\circ$. Dans le triangle HJD rectangle en J, on utilise le sinus : $\sin 25^\circ = \dfrac{JD}{HD}$, d'où $JD = 3 \times \sin 25^\circ \approx 1{,}268$, soit 1,27 m.
- **Méthode 2 (aires).** On calcule d'abord HI par le théorème de Pythagore dans le triangle HDI rectangle en D : $HI = \sqrt{3^2 + 1{,}4^2} = \sqrt{10{,}96} \approx 3{,}311$ m. Puis on écrit l'aire du triangle HDI de deux façons : $\dfrac{HD \times DI}{2} = \dfrac{HI \times JD}{2}$ (car [JD] est la hauteur issue de D). D'où $JD = \dfrac{3 \times 1{,}4}{HI} \approx 1{,}269$, soit 1,27 m.

Autre démarche acceptée : calculer l'angle $\widehat{DHI}$ avec $\tan\widehat{DHI} = \dfrac{DI}{HD} = \dfrac{1{,}4}{3}$, puis utiliser le sinus dans le triangle HJD. **Les trois démarches confirment JD ≈ 1,27 m.**

> 💡 **Astuce.** Les petites croix sur [AB] sont un codage de longueurs égales : c'est la donnée clé qui permet d'obtenir HD = 3 m. Pense toujours à lire les codages d'une figure.

Exercice 5 – Vrai ou faux : identité remarquable et vitesses *(4 pts)*

Affirmation 1 : fausse. On reconnaît une identité remarquable : $n^2 - 6n + 9 = n^2 - 2 \times n \times 3 + 3^2 = (n-3)^2$. Pour $n = 3$ (qui est bien un entier naturel), on obtient $3^2 - 6 \times 3 + 9 = 9 - 18 + 9 = 0$. L'expression n'est donc pas toujours différente de 0 : $n = 3$ **est un contre-exemple.**

Affirmation 2 : fausse. On convertit la vitesse du faucon en m/s : $180 \text{ km/h} = \dfrac{180\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 50 \text{ m/s}$.
Comme $50 < 51$, **le faucon (50 m/s) est moins rapide que le ballon (51 m/s)**.

Exercice 6 – Aire et pourcentage : les dalles autour de la piscine *(5 pts)*

Étape 1 : choix du modèle. On compare les surfaces (aires) des trois rectangles, en mètres :

- Modèle A : $5 \times 3 = 15$ m² ;
- Modèle B : $8{,}5 \times 3{,}5 = 29{,}75$ m² ;
- Modèle C : $8 \times 4 = 32$ m².

Ils choisissent donc le **modèle C** (8 m sur 4 m).

Étape 2 : surface de dalles. Les dalles entourent la piscine sur une largeur de 2 m de chaque côté. L'ensemble piscine + dalles forme un rectangle de $8 + 2 \times 2 = 12$ m sur $4 + 2 \times 2 = 8$ m, d'aire $12 \times 8 = 96$ m². La surface couverte par les dalles vaut donc $96 - 32 = 64$ m², soit 64 dalles de 1 m².

Étape 3 : prix. Sans remise : $64 \times 13{,}90 = 889{,}60$ €. La remise de 15 % revient à multiplier par $1 - 0{,}15 = 0{,}85$: $889{,}60 \times 0{,}85 = 756{,}16$ € (vérification : la remise vaut $889{,}60 \times 0{,}15 = 133{,}44$ € et $889{,}60 - 133{,}44 = 756{,}16$ €).

Ils payent 756,16 € pour leurs dalles.

> ⚠ **Piège.** Ne compte pas seulement le périmètre de la piscine multiplié par 2 m : tu oublierais les quatre carrés de 2 m × 2 m dans les coins (16 m²). La méthode « grand rectangle moins piscine » évite cet oubli. La profondeur, le débit de la pompe et l'épaisseur des dalles ne servent à rien ici.

Exercice 7 – Volume de boules et section d'une sphère *(5 pts)*

1. a. Le volume d'une boule de rayon r est $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. Pour la tête, $r = 3$ cm : $V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = \dfrac{4 \times 27}{3}\pi = 36\pi$. **Le volume de la tête est bien 36π cm³.**

1. b. Le rayon du corps est 2 fois plus grand : c'est un agrandissement de rapport $k = 2$, donc les volumes sont multipliés par $k^3 = 2^3 = 8$. $V_{\text{corps}} = 8 \times 36\pi = 288\pi$. **Le volume exact de la boule du corps est 288π cm³** (vérification : $\dfrac{4}{3}\pi \times 6^3 = \dfrac{4 \times 216}{3}\pi = 288\pi$).

2. La section d'une sphère par un plan est un cercle ; la surface d'assemblage est donc un disque. Notons O le centre de la tête, H le centre du disque de section et M un point du cercle de section. Le triangle OHM est rectangle en H, avec $OH = 2$ cm (distance du plan au centre) et $OM = 3$ cm (rayon de la boule).
D'après le **théorème de Pythagore** : $HM^2 = OM^2 - OH^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$, donc le rayon du disque vaut $\sqrt{5}$ cm.
Aire du disque : $\mathcal{A} = \pi \times HM^2 = 5\pi \approx 15{,}7$ cm². **L'aire de la surface d'assemblage est d'environ 16 cm².**

> 💡 **Astuce.** Pour l'aire, tu n'as pas besoin de calculer $\sqrt{5}$: l'aire utilise HM^2, qui vaut directement 5.

Exercice 8 – Comparer deux tarifs de train *(4 pts)*

Notons n le nombre d'allers-retours effectués dans l'année.

- Sans abonnement : prix $= 40n$ (en euros).
- Avec abonnement : chaque aller-retour coûte $40 \div 2 = 20$ €, d'où prix $= 442 + 20n$.

Les deux formules coûtent le même prix lorsque $40n = 442 + 20n$, soit $20n = 442$, donc $n = 22{,}1$. Comme n est un nombre entier, on compare autour de cette valeur :

- pour 22 allers-retours : $40 \times 22 = 880$ € sans abonnement, contre $442 + 20 \times 22 = 882$ € avec ;
- pour 23 allers-retours : $40 \times 23 = 920$ € sans abonnement, contre $442 + 20 \times 23 = 902$ € avec.

Plus généralement, $40n < 442 + 20n$ équivaut à $n < 22{,}1$.

Conclusion : si Sophie fait 22 allers-retours ou moins dans l'année, elle a intérêt à payer chaque trajet sans abonnement ; à partir de 23 allers-retours, l'abonnement est plus avantageux.

Conseils pour le jour J

Ce sujet comporte huit exercices courts : ne passe pas trop de temps sur le QCM (pas de justification demandée) et garde du temps pour la charpente (6 points), l'exercice le plus long. Quand on te demande de « démontrer » une valeur donnée, écris le théorème utilisé, le calcul complet puis l'arrondi : c'est la rédaction qui rapporte les points, pas le résultat que tu connais déjà.

Les exercices 6 et 8 sont des tâches complexes : écris chaque étape (choix du modèle, surface, prix, remise ; puis expressions des deux tarifs et comparaison). Même un calcul inachevé rapporte des points s'il est clairement posé. Termine toujours par une phrase de réponse à la question posée.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).