Corrigé – Brevet 2015 – mathématiques – Amérique du Nord

QCM : puissances, fractions, pourcentage et agrandissement, Lecture graphique : une étape cycliste, Dés tétraédriques : fréquences et probabilités, Programme de calcul et équation, Caméras de télévision : théorème de Thalès, Tour de France : durées, étendue, médiane et vitesse, La pyramide du Louvre : hauteur et patron à l'échelle

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – QCM : puissances, fractions, pourcentage et agrandissement *(6 pts)*

1. Réponse : $2{,}5 \times 10^{-7}$. On regroupe les nombres décimaux et les puissances de 10 :
$\dfrac{5 \times 10^{6} \times 1{,}2 \times 10^{-8}}{2{,}4 \times 10^{5}} = \dfrac{5 \times 1{,}2}{2{,}4} \times \dfrac{10^{6} \times 10^{-8}}{10^{5}} = \dfrac{6}{2{,}4} \times 10^{6-8-5} = 2{,}5 \times 10^{-7}$.
C'est bien une écriture scientifique, car $1 \leqslant 2{,}5 < 10$. (La réponse 25×10^{-8} est égale mais n'est pas une écriture scientifique.)

2. Réponse : 4. $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{20} + \dfrac{4}{20} = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$, donc $R = 4$.

3. Réponse : 25 %. La réduction est de $120 - 90 = 30$ €, et $\dfrac{30}{120} = 0{,}25 = 25\,\%$.

4. Réponse : 160 cm². Le rectangle agrandi mesure $5 \times 2 = 10$ cm sur $8 \times 2 = 16$ cm, donc son aire vaut $10 \times 16 = 160$ cm². On retrouve ce résultat avec la propriété : dans un agrandissement de coefficient k, les aires sont multipliées par k^2, ici $40 \times 2^2 = 160$ cm².

> ⚠ **Piège.** Dans un agrandissement de coefficient 2, l'aire n'est pas multipliée par 2 mais par $2^2 = 4$: la réponse 80 cm² est le piège classique.

Exercice 2 – Lecture graphique : une étape cycliste *(4 pts)*

Le graphique relie les points (0 ; 0), (1 ; 40), (2 ; 70), (3 ; 130), (4 ; 170) et (4,5 ; 190), la durée étant en heures et la distance en kilomètres.

1. a. Le dernier point a pour ordonnée 190. **L'étape mesure 190 km.**

1. b. L'ordonnée 100 est atteinte entre 2 h (70 km) et 3 h (130 km), sur la droite qui relie ces deux points, exactement à l'abscisse 2,5. **Le cycliste a parcouru les cent premiers kilomètres en 2 h 30 min.**

1. c. La course dure 4,5 h ; la dernière demi-heure va de 4 h à 4,5 h. Le cycliste passe de 170 km à 190 km. **Il a parcouru 20 km lors de la dernière demi-heure.**

2. Non, il n'y a pas proportionnalité. La représentation graphique d'une situation de proportionnalité est une droite passant par l'origine ; ici, la courbe passe par l'origine mais c'est une ligne brisée, pas une droite. On le vérifie par le calcul : $\dfrac{40}{1} = 40$ alors que $\dfrac{70}{2} = 35$, les quotients ne sont pas égaux. Explication : la vitesse du cycliste n'est pas constante ; elle dépend du relief (montées, descentes), du vent, de la fatigue ou du rythme de la course. Par exemple, il parcourt 30 km entre la 1re et la 2e heure, mais 60 km entre la 2e et la 3e heure.

Exercice 3 – Dés tétraédriques : fréquences et probabilités *(6 pts)*

1. Sur le diagramme, la barre de la somme 3 monte jusqu'à 15. **La fréquence d'apparition de la somme 3 est d'environ 15 %.**

2. Il n'y a aucune barre au-dessus de la somme 1 : **sa fréquence est 0 %.** C'est normal, car chaque dé affiche au moins 1, donc la somme des deux dés vaut au moins $1 + 1 = 2$: obtenir une somme égale à 1 est impossible.

3. a. Pour obtenir une somme égale à 3, il faut : **1 sur le premier dé et 2 sur le second**, ou **2 sur le premier dé et 1 sur le second**. Il y a donc 2 lancers favorables.

3. b. Chaque dé a 4 faces équiprobables, donc il y a $4 \times 4 = 16$ résultats possibles, tous équiprobables (les dés sont équilibrés). Deux de ces résultats donnent une somme égale à 3, d'où $p = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$. **La probabilité d'obtenir la somme 3 est de 12,5 %.**

Ce résultat est différent de la fréquence de 15 % observée à la question 1 car une fréquence est obtenue par l'expérience (ici 1 000 lancers simulés) et varie d'une série de lancers à l'autre : c'est la **fluctuation d'échantillonnage**. La probabilité est une valeur théorique ; la fréquence s'en rapproche quand le nombre de lancers devient très grand, mais elle ne lui est pas forcément égale.

> 💡 **Astuce.** Pour lister les issues de deux dés, fais un tableau à double entrée (premier dé en ligne, second en colonne) : les 16 cases donnent toutes les sommes, et tu ne risques pas d'oublier le cas « 2 puis 1 ».

Exercice 4 – Programme de calcul et équation *(4 pts)*

On appelle x le nombre pensé. On lui soustrait 10 : $x - 10$; on élève au carré : $(x-10)^2$; on soustrait le carré du nombre de départ : $(x-10)^2 - x^2$. On cherche x tel que :

$$(x-10)^2 - x^2 = -340$$

On développe avec l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:
$x^2 - 20x + 100 - x^2 = -340$
$-20x + 100 = -340$
$-20x = -440$
$x = \dfrac{-440}{-20} = 22.$

Vérification : $22 - 10 = 12$; $12^2 = 144$; $22^2 = 484$; $144 - 484 = -340$. ✓

Le nombre pensé est 22.

> ⚠ **Piège.** Ne développe pas $(x-10)^2$ en $x^2 - 100$: il manque le double produit $-20x$. Les termes x^2 s'annulent ensuite, ce qui ramène à une équation du premier degré.

Exercice 5 – Caméras de télévision : théorème de Thalès *(4 pts)*

1. La phrase est : « **On considère que les deux hélicoptères se situent à la même altitude et que le peloton des coureurs roule sur une route horizontale.** » Les deux hélicoptères étant à la même altitude, la droite (LH) est horizontale ; la route (MN) l'est aussi : les droites (LH) et (MN) sont donc parallèles.

2. On travaille en mètres : $AM = AN = 1\ \text{km} = 1\,000\ \text{m}$. Les points A, H, M sont alignés, les points A, L, N sont alignés et les droites (HL) et (MN) sont parallèles. D'après le **théorème de Thalès** dans le triangle AMN :

$$\frac{AH}{AM} = \frac{AL}{AN} = \frac{HL}{MN}$$

soit $\frac{720}{1\,000} = \frac{270}{MN}$, d'où $MN = \frac{270 \times 1\,000}{720} = 375$.

Les deux motos sont distantes de 375 m.

Vérification : $\frac{270}{375} = 0{,}72 = \frac{720}{1\,000}$.

Exercice 6 – Tour de France : durées, étendue, médiane et vitesse *(4 pts)*

1. Leopold Konig : 81 h 00 min ; Vincenzo Nibali : 80 h 45 min. 81 h 00 − 80 h 45 = 15 min. **La différence est de 15 minutes.**

2. a. Nibali a le temps le plus petit de la série et Konig le temps le plus grand. La différence entre la plus grande et la plus petite valeur d'une série est son **étendue** : **15 min est l'étendue de la série.**

2. b. La série comporte 9 valeurs, déjà rangées dans l'ordre croissant (le classement va du temps le plus court au plus long) : 80 h 45 ; 80 h 52 ; 80 h 53 ; 80 h 53 ; **80 h 55** ; 80 h 57 ; 80 h 59 ; 81 h 00 ; 81 h 00. L'effectif est impair, donc la médiane est la valeur centrale, la 5^{e} (4 valeurs avant, 4 valeurs après). **La médiane est 80 h 55 min** (temps de Romain Bardet).

2. c. Thibaut Pinot a parcouru 3 260,5 km en 80 h 52 min. On convertit la durée en heures : 52 min $= \frac{52}{60}$ h, donc $t = 80 + \frac{52}{60} \approx 80{,}867$ h. La vitesse moyenne est :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{3\,260{,}5}{80 + \frac{52}{60}} \approx 40{,}32 \text{ km/h}$$

La vitesse moyenne de Thibaut Pinot est d'environ 40 km.h^{-1}. Vérification : $40 \times 80{,}867 \approx 3\,235$ km, proche de 3 260,5 km.

> ⚠ **Piège.** 80 h 52 min ne s'écrit pas 80,52 h : une heure compte 60 minutes, pas 100. Divise toujours les minutes par 60 avant de calculer une vitesse.

Exercice 7 – La pyramide du Louvre : hauteur et patron à l'échelle *(8 pts)*

1. La base ABCD est un carré de côté 35,50 m et la pyramide est régulière : le pied H de la hauteur est le centre du carré, c'est-à-dire le milieu de ses diagonales.

Calcul de AC. Le triangle ABC est rectangle en B (ABCD est un carré). D'après le **théorème de Pythagore** : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 35{,}5^2 + 35{,}5^2 = 1\,260{,}25 + 1\,260{,}25 = 2\,520{,}5$.

H est le milieu de [AC], donc $AH = \frac{AC}{2}$ et $AH^2 = \frac{AC^2}{4} = \frac{2\,520{,}5}{4} = 630{,}125$.

Calcul de SH. La hauteur [SH] est perpendiculaire à la base, donc le triangle SHA est rectangle en H. D'après le **théorème de Pythagore** : $SA^2 = SH^2 + AH^2$, donc $SH^2 = SA^2 - AH^2 = 33{,}14^2 - 630{,}125 = 1\,098{,}259\,6 - 630{,}125 = 468{,}134\,6$.

$SH = \sqrt{468{,}134\,6} \approx 21{,}636$ m. **La hauteur réelle de la pyramide du Louvre est d'environ 21,64 m** (arrondie au centimètre).

> 💡 **Astuce.** Garde les valeurs exactes ($AH^2 = 630{,}125$) jusqu'au bout plutôt qu'un AH déjà arrondi : arrondir trop tôt peut fausser le centimètre demandé.

2. a. À l'échelle $\dfrac{1}{800}$, les longueurs réelles sont divisées par 800. Le patron d'une pyramide régulière à base carrée est formé du carré de base et de quatre triangles isocèles identiques ; il suffit donc de deux longueurs :

- côté du carré : $35{,}50\ \text{m} = 3\,550\ \text{cm}$, et $\dfrac{3\,550}{800} = 4{,}437\,5\ \text{cm}$, soit **4,4 cm (44 mm)** ;
- arêtes latérales : $33{,}14\ \text{m} = 3\,314\ \text{cm}$, et $\dfrac{3\,314}{800} = 4{,}142\,5\ \text{cm}$, soit **4,1 cm (41 mm)**.

Le patron se compose d'**un carré de 4,4 cm de côté** et de **quatre triangles isocèles de côtés 4,1 cm, 4,1 cm et 4,4 cm**.

2. b. Construction (précision au millimètre) :

1. Tracer un carré ABCD de 4,4 cm de côté, à la règle et à l'équerre.
2. Sur chacun des quatre côtés, construire à l'extérieur du carré un triangle isocèle : par exemple pour le côté [AB], tracer au compas un arc de cercle de centre A et de rayon 4,1 cm, puis un arc de centre B et de même rayon ; leur point d'intersection (à l'extérieur du carré) est le sommet S de la face SAB.
3. Recommencer pour les côtés [BC], [CD] et [DA], puis relier chaque sommet obtenu aux extrémités du côté correspondant.

On laisse visibles les arcs de cercle : ce sont les traits de construction attendus.

Conseils pour le jour J

Ce sujet comporte sept exercices variés : commence par ce qui se fait vite (le QCM, la lecture graphique de l'exercice 2, le programme de calcul) pour engranger des points, puis garde au moins 25 minutes pour la pyramide, qui rapporte 8 points avec un calcul en deux étapes (diagonale du carré, puis hauteur) et une construction.

Les pièges de ce sujet portent sur les unités et les conversions : les aires dans un agrandissement (multipliées par k^2), les minutes qui ne sont pas des centièmes d'heure (80 h 52 min), les kilomètres et les mètres mélangés à l'exercice 5, et l'échelle 1/800 qui impose de passer en centimètres. Écris toujours l'unité dans ta phrase de conclusion.

Pour la construction du patron, apporte un compas bien réglé et trace des traits fins : la précision au millimètre est notée, et les arcs de construction doivent rester visibles.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).