Corrigé – Brevet 2014 – mathématiques – Pondichéry

Divisions euclidiennes et PGCD : les dragées, QCM : racine carrée, aires, fonctions, hasard, factorisation, Programme de calcul et calcul littéral, Pythagore et Thalès : choisir un parcours de santé, Volumes d'une bouteille : cylindre, cône et tronc de cône, Statistiques et pourcentages : médailles d'or olympiques

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Divisions euclidiennes et PGCD : les dragées *(6 pts)*

1. On effectue les divisions euclidiennes par 20.
Dragées au chocolat : $3\,003 = 20 \times 150 + 3$, donc chaque corbeille reçoit 150 dragées au chocolat et il en reste 3.
Dragées aux amandes : $3\,731 = 20 \times 186 + 11$, donc chaque corbeille reçoit 186 dragées aux amandes et il en reste 11.
Au total : $3 + 11 = 14$. **Il reste 14 dragées non utilisées.**

2. a) Pour que les 90 ballotins aient la même composition sans reste, 90 doit diviser à la fois 3 003 et 3 731. Or $3\,003 \div 90 \approx 33{,}37$ n'est pas un nombre entier (3 003 est impair, alors que tout multiple de 90 est pair). **Faire 90 ballotins ne convient pas.**

2. b) Le nombre de ballotins doit être un diviseur commun de 3 003 et 3 731 ; le nombre maximal est donc leur **PGCD**. On applique l'**algorithme d'Euclide** :
$3\,731 = 3\,003 \times 1 + 728$
$3\,003 = 728 \times 4 + 91$
$728 = 91 \times 8 + 0$
Le dernier reste non nul est 91, donc $\text{PGCD}(3\,003 ; 3\,731) = 91$.
Composition : $3\,003 \div 91 = 33$ et $3\,731 \div 91 = 41$.
Ils feront 91 ballotins contenant chacun 33 dragées au chocolat et 41 dragées aux amandes.

Vérification : $91 \times 33 = 3\,003$ et $91 \times 41 = 3\,731$.

> 💡 **Astuce.** « Le maximum de paquets identiques sans reste » est la phrase qui doit te faire penser au PGCD. Termine toujours par la composition d'un paquet, c'est la deuxième moitié de la question.

Exercice 2 – QCM : racine carrée, aires, fonctions, hasard, factorisation *(5 pts)*

Les justifications ci-dessous ne sont pas demandées sur la copie ; elles servent à comprendre.

1. Réponse C : $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ (une racine carrée est toujours positive).

2. Réponse C : leurs périmètres ne sont pas forcément égaux. Contre-exemple : un carré de 2 cm de côté et un rectangle de 1 cm sur 4 cm ont la même aire (4 cm²) mais des périmètres différents (8 cm et 10 cm) ; ils ne sont donc pas superposables non plus.

3. Réponse A : $f(x) = 3x - 2x - 7 + 3x + 5 = 4x - 2$. C'est de la forme $ax + b$ avec $b = -2 \neq 0$: f est affine, mais pas linéaire.

4. Réponse C : les tirages du loto sont indépendants et tous les numéros ont la même probabilité de sortir à chaque tirage ; les résultats passés ne donnent aucune information sur le prochain tirage.

5. Réponse A : on reconnaît $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a = x - 1$ et $b = 4$:
$(x - 1)^2 - 16 = (x - 1 - 4)(x - 1 + 4) = (x - 5)(x + 3)$.
La réponse C, $x^2 - 2x - 15$, est égale à l'expression mais elle est développée, pas factorisée.

> ⚠ **Piège.** À la question 5, les réponses A et C sont toutes les deux égales à $(x-1)^2-16$; seule A est un **produit**, donc une forme factorisée. Lis toujours le mot clé de la question.

Exercice 3 – Programme de calcul et calcul littéral *(3 pts)*

On teste d'abord un exemple : avec 4, on obtient $4+3=7$, puis $7\times 7=49$, puis $49+3\times 4=61$, puis $61-21=40$, qui est bien un multiple de 10.

Un exemple ne suffit pas : on fait la preuve pour un nombre entier quelconque n.
On ajoute 3 : $n+3$. On multiplie par 7 : $7(n+3)=7n+21$. On ajoute le triple du nombre de départ : $7n+21+3n=10n+21$. On enlève 21 : $10n+21-21=10n$.

Le résultat est $10n$, c'est-à-dire $10\times n$ avec n entier. **C'est vrai : on obtient toujours un multiple de 10 (dix fois le nombre de départ).**

Exercice 4 – Pythagore et Thalès : choisir un parcours de santé *(7 pts)*

Parcours ACDA. Le triangle ACD est rectangle en C (codage de l'angle droit). D'après le **théorème de Pythagore** :
$AD^2=AC^2+CD^2=1{,}4^2+1{,}05^2=1{,}96+1{,}1025=3{,}0625$, donc $AD=\sqrt{3{,}0625}=1{,}75$ km.
Longueur du parcours : $AC+CD+DA=1{,}4+1{,}05+1{,}75=4{,}2$. **Le parcours ACDA mesure 4,2 km.**

Parcours AEFA. Il manque la longueur EF. Les points A, E′, E sont alignés, les points A, F′, F sont alignés et les droites (E′F′) et (EF) sont parallèles. D'après le **théorème de Thalès** dans les triangles AE′F′ et AEF :
$\dfrac{AE'}{AE}=\dfrac{AF'}{AF}=\dfrac{E'F'}{EF}$, soit $\dfrac{0{,}5}{1{,}3}=\dfrac{0{,}4}{EF}$.
Donc $EF=\dfrac{0{,}4\times 1{,}3}{0{,}5}=\dfrac{0{,}52}{0{,}5}=1{,}04$ km.
Longueur du parcours : $AE+EF+FA=1{,}3+1{,}04+1{,}6=3{,}94$. **Le parcours AEFA mesure 3,94 km.**

Comparaison avec 4 km. Écart pour ACDA : $4{,}2-4=0{,}2$ km ; écart pour AEFA : $4-3{,}94=0{,}06$ km.
Comme $0{,}06<0{,}2$, **c'est le parcours AEFA qu'il faut choisir : sa longueur est la plus proche de 4 km.**

Remarque : l'angle de 30° en A n'est pas utile pour répondre.

> ⚠ **Piège.** La figure n'est pas à l'échelle : ne mesure rien à la règle. Et ne compare pas les longueurs entre elles mais leurs **écarts** à 4 km : 4,2 km dépasse, 3,94 km est en dessous, et c'est l'écart le plus petit qui gagne.

Exercice 5 – Volumes d'une bouteille : cylindre, cône et tronc de cône *(8 pts)*

1. La partie cylindrique a un diamètre de 10 cm, donc un rayon $r=5$ cm, et une hauteur $h=15$ cm. Volume d'un cylindre = aire de la base × hauteur :
$V=\pi\times 5^2\times 15=375\pi\approx 1\,178{,}1$.
Le volume de la partie cylindrique est 375π cm³, soit environ 1 178 cm³.

2. a) Volume d'un cône $=\dfrac{1}{3}\times$ aire de la base × hauteur, avec un rayon de 5 cm et une hauteur SO = 6 cm :
$V_1=\dfrac{1}{3}\times\pi\times 5^2\times 6=\dfrac{150\pi}{3}=50\pi$.
$V_1=50\pi$ **cm³.**

2. b) Le petit cône de sommet S et de hauteur SO′ est une **réduction** du grand cône (section par un plan parallèle à la base), de coefficient $k=\dfrac{SO'}{SO}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$. Dans une réduction de coefficient k, les volumes sont multipliés par k^3 :

volume du petit cône $= \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \times 50\pi = \dfrac{50\pi}{27}$ cm³.
Le tronc de cône est le grand cône privé du petit cône :
$V_2 = 50\pi - \dfrac{50\pi}{27} = \dfrac{1\,350\pi}{27} - \dfrac{50\pi}{27} = \dfrac{1\,300\pi}{27}$.
Valeur approchée : $\dfrac{1\,300\pi}{27} \approx 151{,}26$.
$V_2 = \dfrac{1\,300\pi}{27}$ **cm³, soit environ 151 cm³.**

Vérification directe : le rayon du petit cône vaut $5 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$ cm, donc son volume est $\dfrac{1}{3} \times \pi \times \dfrac{25}{9} \times 2 = \dfrac{50\pi}{27}$ cm³ : on retrouve le même résultat.

3. C'est le **graphique 1** qui convient. En effet :

- la bouteille est vide pour $h = 0$, donc $V(0) = 0$;
- de $h = 0$ à $h = 15$ cm (partie cylindrique), la section est constante : le volume est proportionnel à la hauteur, la courbe est un segment de droite passant par l'origine, et il atteint environ 1 178 cm³ pour $h = 15$;
- de $h = 15$ à $h = 19$ cm (tronc de cône, de hauteur $6 - 2 = 4$ cm), la section diminue : le volume augmente encore, mais de plus en plus lentement, d'environ 151 cm³ seulement, pour atteindre environ $1\,178 + 151 = 1\,329$ cm³ ;
- au-delà, dans le goulot étroit, le volume augmente très peu.

Le graphique 1 montre exactement cela (environ 1 200 cm³ à 15 cm, puis une croissance ralentie jusqu'à environ 1 330 cm³).

Les autres graphiques ne conviennent pas :

- **graphique 2** : le volume diminue après $h = 15$ cm, ce qui est impossible puisqu'on ajoute du liquide ;
- **graphique 3** : après $h = 15$ cm, le volume augmente beaucoup plus vite (jusqu'à environ 2 500 cm³), alors que le tronc de cône est plus étroit que le cylindre et ne contient qu'environ 151 cm³ ;
- **graphique 4** : la courbe ne passe pas par l'origine ($V(0) \approx 150$ cm³ au lieu de 0) et le volume à 15 cm (environ 1 350 cm³) ne correspond pas aux 1 178 cm³ du cylindre.

Exercice 6 – Statistiques et pourcentages : médailles d'or olympiques *(7 pts)*

1. Le nombre total de pays est la somme des effectifs de B2 à N2. **Formule saisie en O2 : =SOMME(B2:N2)**, qui donne 26.

2. a) Moyenne pondérée = (somme des produits valeur × effectif) ÷ effectif total :
$1 \times 8 + 2 \times 2 + 3 \times 2 + 4 \times 2 + 5 \times 1 + 6 \times 3 + 11 \times 1 + 13 \times 2 + 14 + 15 + 18 + 32 + 40$
$= 8 + 4 + 6 + 8 + 5 + 18 + 11 + 26 + 14 + 15 + 18 + 32 + 40 = 205$.
moyenne $= \dfrac{205}{26} \approx 7{,}88$. **La moyenne est d'environ 8 médailles d'or par pays.**

Vérification avec le tableau des pays : $40 + 32 + 18 + 15 + 14 + 13 + 13 + 11 + 6 + 6 + 6 + 5 + 4 = 183$ et $4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 8 \times 1 = 22$, soit bien $183 + 22 = 205$ médailles.

2. b) L'effectif total est 26 (nombre pair) : la médiane est la moyenne de la 13e et de la 14e valeur de la série rangée dans l'ordre croissant. Effectifs cumulés : 8 pays ont 1 médaille, 10 ont au plus 2, 12 au plus 3, 14 au plus 4. Les 13e et 14e valeurs sont donc toutes les deux égales à 4. **La médiane est 4 médailles d'or.**

2. c) La série contient quelques **valeurs extrêmes très élevées** (40 pour la France, 32 pour l'Italie) alors que la plupart des pays ont peu de médailles. Ces grandes valeurs font monter la moyenne, mais n'ont pas

d'influence sur la médiane, qui partage seulement l'effectif en deux. **C'est pourquoi la moyenne (environ 8) est nettement plus grande que la médiane (4).**

3. Les 26 pays ayant au moins une médaille d'or représentent 70 % des pays médaillés. Si N est le nombre de pays médaillés : $0{,}7 \times N = 26$, donc $N = \dfrac{26}{0{,}7} \approx 37{,}14$, soit environ 37 pays médaillés.
Pays sans médaille d'or : $37 - 26 = 11$ (ou directement : 30 % de $37{,}14 \approx 11{,}14$).
Environ 11 pays n'ont obtenu que des médailles d'argent ou de bronze.

> 💡 **Astuce.** Ici, 26 est la partie (70 %) et non le total : on divise par 0,7 pour retrouver le total. Multiplier 26 par 0,3 serait une erreur classique.

Conseils pour le jour J

Ce sujet compte six exercices indépendants : commence par ceux que tu maîtrises le mieux (le QCM et le programme de calcul se traitent vite) et garde du temps pour l'exercice 5, le plus long. Les exercices 3 et 6 rappellent que toute trace de recherche est prise en compte : même un essai sur un exemple rapporte des points.

Dans les exercices de géométrie, nomme toujours le théorème et vérifie ses conditions (triangle rectangle pour Pythagore, points alignés et droites parallèles pour Thalès). Une donnée inutile peut être glissée dans l'énoncé, comme l'angle de 30° de l'exercice 4 : ne te sens pas obligé de tout utiliser.

Pour le graphique de l'exercice 5, appuie-toi sur tes calculs : environ 1 178 cm³ à 15 cm et environ 1 329 cm³ à 19 cm. Un graphique se valide ou s'élimine avec des valeurs chiffrées, pas avec une impression.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).