Corrigé – Brevet 2014 – mathématiques – Métropole

Octogone régulier inscrit dans un cercle, Promotions sur des cahiers et pourcentages successifs, Programme de calcul et vrai ou faux, Simulation de tirages, tableur et probabilité, QCM : volume, vitesse, racines carrées, puissances de 10, Réglage des feux d'une voiture : trigonométrie et Thalès, Bottes de paille : volumes, masse, prix et isolation d'un toit

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Octogone régulier inscrit dans un cercle *(5 pts)*

1. Construction (aucune justification attendue) : on trace un cercle de centre O et de **rayon 3 cm**. Un octogone régulier a 8 sommets régulièrement répartis sur ce cercle, donc deux sommets consécutifs forment avec O un angle au centre de $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$. On place un premier point A sur le cercle, puis, au rapporteur, on reporte sept fois un angle de 45° à partir de O pour obtenir B, C, D, E, F, G et H ; on relie les points dans l'ordre. (Autre méthode : tracer deux diamètres perpendiculaires, puis leurs bissectrices : les 8 extrémités sont les sommets.)

2. L'octogone est régulier et inscrit dans un cercle de centre O : chaque angle au centre entre deux sommets consécutifs mesure 45°. De D à H, en passant par E, F et G, il y a 4 côtés, donc $\widehat{DOH} = 4 \times 45^\circ = 180^\circ$: les points D, O et H sont alignés et **[DH] est un diamètre** du cercle.
Le point A est aussi sur ce cercle. Or, si un triangle est inscrit dans un cercle et qu'un de ses côtés est un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle et ce diamètre est son hypoténuse. **Le triangle DAH est donc rectangle en A.**

3. L'angle $\widehat{BEH}$ est un **angle inscrit** dans le cercle ; il intercepte l'arc BH qui ne contient pas E, c'est-à-dire l'arc passant par A. De B à H en passant par A, il y a 2 côtés, donc l'angle au centre associé vaut $\widehat{BOH} = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$.
D'après le **théorème de l'angle inscrit**, un angle inscrit mesure la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc : $\widehat{BEH} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$. **L'angle $\widehat{BEH}$ mesure 45°.**

Vérification par une autre méthode : le triangle OEH est isocèle en O (OE = OH = rayon) et $\widehat{EOH} = 3 \times 45^\circ = 135^\circ$, donc $\widehat{OEH} = \frac{180^\circ - 135^\circ}{2} = 22{,}5^\circ$. De même $\widehat{BOE} = 135^\circ$ donne $\widehat{OEB} = 22{,}5^\circ$. Comme [EA] est un diamètre passant par O, situé entre [EB] et [EH], on a $\widehat{BEH} = 22{,}5^\circ + 22{,}5^\circ = 45^\circ$.

> **Astuce.** Dans un polygone régulier à n côtés, l'angle au centre entre deux sommets voisins vaut $\frac{360^\circ}{n}$.
> Compte les côtés entre deux sommets pour obtenir n'importe quel angle au centre, puis divise par 2 pour un angle inscrit.

Exercice 2 – Promotions sur des cahiers et pourcentages successifs *(6 pts)*

On note p le prix d'un cahier avant promotion (le même dans les trois magasins).

1. Pour un seul cahier : au magasin A, le lot de 3 ne s'applique pas, elle paie p ; au magasin B, la réduction ne porte que sur le deuxième cahier, elle paie p ; au magasin C, elle bénéficie de 30 % de réduction et paie $p - 0{,}3p = 0{,}7p$. Comme $0{,}7p < p$, **le magasin C est le plus intéressant pour un seul cahier.**

2. a) Pour deux cahiers :

- magasin A : $2p$;
- magasin B : $p + 0{,}5p = 1{,}5p$;

- magasin C : $2 \times 0{,}7p = 1{,}4p$.

Comme $1{,}4p < 1{,}5p < 2p$, **pour deux cahiers, elle doit choisir le magasin C.**

2. b) Pour trois cahiers :

- magasin A : 3 cahiers pour le prix de 2, soit $2p$;
- magasin B : le deuxième est à moitié prix, le troisième est au prix normal, soit $p + 0{,}5p + p = 2{,}5p$;
- magasin C : $3 \times 0{,}7p = 2{,}1p$.

Comme $2p < 2{,}1p < 2{,}5p$, **pour trois cahiers, elle doit choisir le magasin A.**

3. Une réduction de 30 % revient à multiplier le prix par $1 - 0{,}30 = 0{,}7$; une réduction de 10 % revient à multiplier par $1 - 0{,}10 = 0{,}9$. Les deux réductions s'appliquent l'une après l'autre : le prix payé est $p \times 0{,}7 \times 0{,}9 = 0{,}63p$. Elle paie donc 63 % du prix initial, et la réduction totale est $100\,\% - 63\,\% = 37\,\%$. **Léa obtient une réduction totale de 37 %.**

Vérification avec un cahier à 10 € : après 30 % de réduction il coûte 7 €, puis après 10 % de réduction $7 - 0{,}7 = 6{,}30$ €, soit une économie de 3,70 € sur 10 €, c'est-à-dire 37 %.

> ⚠ **Piège.** Deux réductions successives ne s'additionnent pas : 30 % puis 10 % ne font pas 40 %, car la seconde réduction s'applique à un prix déjà baissé. On multiplie les coefficients.

Exercice 3 – Programme de calcul et vrai ou faux *(5 pts)*

Si on choisit le nombre x, on obtient $x - 6$ d'un côté et $x - 2$ de l'autre, puis le résultat $(x - 6)(x - 2)$.

1. Avec 8 : $8 - 6 = 2$ et $8 - 2 = 6$, puis $2 \times 6 = 12$. **Le programme donne bien 12.**

2.

Proposition 1 : vraie. Avec le nombre 4 : $4 - 6 = -2$ et $4 - 2 = 2$, puis $(-2) \times 2 = -4$. Le résultat -4 est négatif.

Proposition 2 : vraie. $\dfrac{1}{2} - 6 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{12}{2} = -\dfrac{11}{2}$ et $\dfrac{1}{2} - 2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{2} = -\dfrac{3}{2}$, puis $\left(-\dfrac{11}{2}\right) \times \left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{33}{4}$ (produit de deux nombres négatifs, donc positif). Vérification décimale : $(-5{,}5) \times (-1{,}5) = 8{,}25 = \dfrac{33}{4}$.

Proposition 3 : vraie. Le résultat est nul lorsque $(x - 6)(x - 2) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x - 6 = 0$ ou $x - 2 = 0$, c'est-à-dire $x = 6$ ou $x = 2$. Le programme donne 0 pour exactement deux nombres : **2 et 6**.

Proposition 4 : fausse. Une fonction linéaire est de la forme $x \mapsto ax$ et associe toujours 0 au nombre 0. Or, avec 0 au départ, le programme donne $(0 - 6)(0 - 2) = (-6) \times (-2) = 12 \neq 0$. De plus, en développant, $(x - 6)(x - 2) = x^2 - 2x - 6x + 12 = x^2 - 8x + 12$, qui contient un terme en x^2 : ce n'est pas une fonction linéaire.

> 💡 **Astuce.** Pour montrer qu'une affirmation générale est fausse, un seul contre-exemple suffit (ici l'image de 0). Pour montrer qu'une affirmation « il existe » est vraie (proposition 1), un seul exemple suffit aussi.

Exercice 4 – Simulation de tirages, tableur et probabilité *(3 pts)*

1. a) Sur le graphique, après 1 000 tirages, la fréquence d'apparition du jaune se stabilise autour de 0,5, nettement au-dessus des autres couleurs (vert environ 0,25, rouge environ 0,2, bleu proche de 0,05). **La couleur la plus présente dans le sac est le jaune.**

1. b) La fréquence d'apparition du rouge est le quotient du nombre de jetons rouges apparus par le nombre de tirages, soit B2 divisé par A2. **Formule saisie en C2 : =B2/A2**. Vérification avec la ligne 7 : $\frac{1}{6} \approx 0{,}166\,666\,667$, ce qui correspond bien au tableau.

2. Les 20 jetons ont la même probabilité d'être tirés, donc la probabilité de tirer un jeton rouge est $\frac{\text{nombre de jetons rouges}}{20} = \frac{1}{5}$. Le nombre de jetons rouges est donc $20 \times \frac{1}{5} = 4$. **Il y a 4 jetons rouges dans le sac.** (Cela concorde avec le graphique : la fréquence du rouge se stabilise vers 0,2.)

Exercice 5 – QCM : volume, vitesse, racines carrées, puissances de 10 *(4 pts)*

Question 1 : réponse d (8). Le volume d'une boule de rayon r est $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si le rayon est multiplié par 2, le volume est multiplié par $2^3 = 8$: $\frac{4}{3}\pi(2r)^3 = 8 \times \frac{4}{3}\pi r^3$.

Question 2 : réponse a (10 m.s^{-1}). 36 km/h signifie 36 000 m en 3 600 s, soit $\frac{36\,000}{3\,600} = 10$ m/s.

Question 3 : réponse c ($\sqrt{21}$). $525 = 25 \times 21$, donc $\sqrt{525} = \sqrt{25} \times \sqrt{21} = 5\sqrt{21}$, et $\frac{5\sqrt{21}}{5} = \sqrt{21}$.
Vérification : $\sqrt{525} \approx 22{,}91$ et $\frac{22{,}91}{5} \approx 4{,}58 \approx \sqrt{21}$.

Question 4 : réponse a (25). 1,5 To $= 1{,}5 \times 10^{12}$ octets et 60 Go $= 60 \times 10^9 = 6 \times 10^{10}$ octets. Nombre de dossiers : $\frac{1{,}5 \times 10^{12}}{6 \times 10^{10}} = 0{,}25 \times 10^2 = 25$. Vérification : 1,5 To = 1 500 Go et $1\,500 \div 60 = 25$.

> ⚠ **Piège.** Doubler le rayon ne double pas le volume : les longueurs sont multipliées par 2, les aires par $2^2 = 4$ et les volumes par $2^3 = 8$.

Exercice 6 – Réglage des feux d'une voiture : trigonométrie et Thalès *(6 pts)*

1. Le quadrilatère APQC a trois angles droits (en A, en Q et en C sur le schéma) : c'est un rectangle, donc $QC = PA = 0{,}65$ m. Le point K est sur le segment [QC], donc $QK = QC - CK = 0{,}65 - 0{,}58 = 0{,}07$ m. L'inclinaison vaut $\frac{QK}{QP} = \frac{0{,}07}{5} = 0{,}014$. **L'inclinaison est bien égale à 0,014**, et comme $0{,}01 < 0{,}014 < 0{,}015$, les feux de Pauline sont réglés correctement.

2. Dans le triangle PQK rectangle en Q, [QK] est le côté opposé à l'angle $\widehat{QPK}$ et [QP] le côté adjacent. On utilise la **tangente** : $\tan\widehat{QPK} = \frac{QK}{QP} = 0{,}014$. À la calculatrice, $\widehat{QPK} = \arctan(0{,}014) \approx 0{,}802°$. **L'angle $\widehat{QPK}$ mesure environ** 0,8° (arrondi au dixième de degré).

3. Les points S, K, P sont alignés et les points S, C, A sont alignés. Les droites (KC) et (PA) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (AS), donc elles sont **parallèles**. D'après le **théorème de Thalès** dans les triangles SKC et SPA : $\frac{SC}{SA} = \frac{SK}{SP} = \frac{KC}{PA}$.
On pose $SC = x$; alors $SA = SC + CA = x + 5$, et $\frac{x}{x+5} = \frac{0{,}58}{0{,}65}$.
Produit en croix : $0{,}65x = 0{,}58(x+5)$, soit $0{,}65x = 0{,}58x + 2{,}9$, donc $0{,}07x = 2{,}9$ et $x = \frac{2{,}9}{0{,}07} \approx 41{,}43$ m.
Ainsi $AS = x + 5 \approx 46{,}43$ m. **La distance d'éclairage AS est d'environ 46 m** (arrondie au mètre).

Vérification par la trigonométrie : les droites (PQ) et (AS) sont parallèles, donc les angles alternes-internes $\widehat{QPS}$ et $\widehat{PSA}$ sont égaux ; dans le triangle PAS rectangle en A, $\tan\widehat{PSA} = \frac{PA}{AS} = 0{,}014$, d'où $AS = \frac{0{,}65}{0{,}014} \approx 46{,}43$ m. On retrouve bien 46 m.

> ⚠ **Piège.** Si tu utilises la trigonométrie, garde la valeur exacte 0,014 de la tangente et non l'angle arrondi à 0,8° : $\dfrac{0{,}65}{\tan 0{,}8^\circ}$ donne environ 46,55 m, donc 47 m, ce qui est faux à cause de l'arrondi intermédiaire.

Exercice 7 – Bottes de paille : volumes, masse, prix et isolation d'un toit *(7 pts)*

1. Volume d'une botte (pavé droit), en mètres : $V = 0{,}9 \times 0{,}45 \times 0{,}35 = 0{,}141\,75$ m³.
Masse d'une botte : 1 m³ pèse 90 kg, donc $m = 0{,}141\,75 \times 90 = 12{,}757\,5$ kg, soit $0{,}012\,757\,5$ tonne.
Prix : la paille coûte 40 € la tonne, donc une botte coûte $0{,}012\,757\,5 \times 40 = 0{,}510\,3$ €. **Une botte coûte bien 0,51 €, arrondi au centime.**

2. a) La zone grisée est le rectangle JKGF (pan du toit) : ses dimensions sont JF et FG.

- Le bâtiment est un prisme droit, donc $FG = BC = 15{,}3$ m et $BF = CG = 5$ m.
- Le quadrilatère ABFI est un rectangle, donc $IF = AB = 3{,}6$ m et $AI = BF = 5$ m ; ainsi $JI = AJ - AI = 7{,}7 - 5 = 2{,}7$ m.
- Le triangle JIF est rectangle en I, donc d'après le **théorème de Pythagore** : $JF^2 = JI^2 + IF^2 = 2{,}7^2 + 3{,}6^2 = 7{,}29 + 12{,}96 = 20{,}25$, d'où $JF = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5$ m.

Aire de la zone grisée : $\mathcal{A} = JF \times FG = 4{,}5 \times 15{,}3 = 68{,}85$ m².
Volume d'isolant pour une épaisseur de 35 cm : $68{,}85 \times 0{,}35 = 24{,}097\,5$ m³.
Nombre de bottes : $\dfrac{24{,}097\,5}{0{,}141\,75} = 170$.
Vérification par un pavage : les bottes étant posées à plat (épaisseur 35 cm), il en faut $\dfrac{4{,}5}{0{,}45} = 10$ dans la largeur du pan et $\dfrac{15{,}3}{0{,}9} = 17$ dans la longueur, soit $10 \times 17 = 170$ bottes. **Marc devra commander 170 bottes de paille.**

2. b) Coût de la paille : $170 \times 0{,}510\,3 = 86{,}751$ €. **La paille nécessaire coûte environ 86,75 €** (si l'on utilise le prix arrondi de 0,51 € par botte, on obtient $170 \times 0{,}51 = 86{,}70$ €, résultat également accepté). Vérification : $24{,}097\,5$ m³ de paille pèsent $24{,}097\,5 \times 90 = 2\,168{,}775$ kg, soit environ 2,169 t, et $2{,}168\,775 \times 40 \approx 86{,}75$ €.

Conseils pour le jour J

Ce sujet comporte sept exercices indépendants : commence par ceux où tu te sens le plus à l'aise, mais numérote bien tes réponses. Le QCM de l'exercice 5 ne demande aucune justification : fais les calculs au brouillon et vérifie-les par une seconde méthode (1,5 To = 1 500 Go, par exemple) avant de recopier la lettre.

Les exercices 6 et 7 sont des problèmes concrets à plusieurs étapes : écris d'abord ce que tu cherches, calcule les longueurs manquantes (QK = 0,07 m, JF = 4,5 m) en nommant le théorème utilisé, et garde les valeurs exactes jusqu'au résultat final. N'arrondis qu'à la fin, exactement comme demandé (dixième de degré, mètre près, centime).

Dans l'exercice 3, chaque affirmation doit être justifiée par un calcul ou un contre-exemple : « vrai » ou « faux » sans explication ne rapporte rien. Et même si tu bloques, laisse une trace de ta recherche : elle est prise en compte dans la notation.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).