Corrigé – Brevet 2014 – mathématiques – Centres étrangers

Tableur et algorithme des différences (PGCD), Problème de Fibonacci : théorème de Pythagore, Vrai, faux ou on ne peut pas savoir : géométrie, Pyramide du Louvre : volume et réduction, Développement et calcul astucieux, Itinéraire Lille – Marseille : vitesse, durée, carburant, Conversion de températures : fonction affine

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Tableur et algorithme des différences (PGCD) *(6 pts)*

1. Sur chaque ligne, la colonne C contient la différence des colonnes A et B : $216 - 126 = 90$, $126 - 90 = 36$, $90 - 36 = 54$, etc. On entre en C1, puis on recopie vers le bas : **=A1-B1**.

2. On observe le passage d'une ligne à la suivante :

- ligne 1 $\to$ ligne 2 : B1 $=$ 126 et C1 $=$ 90 ; on retrouve A2 $=$ 126 et B2 $=$ 90 ;
- ligne 2 $\to$ ligne 3 : B2 $=$ 90 et C2 $=$ 36 ; on retrouve A3 $=$ 90 et B3 $=$ 36 ;
- ligne 3 $\to$ ligne 4 : B3 $=$ 36 et C3 $=$ 54 ; on trouve A4 $=$ 54 et B4 $=$ 36. Les deux nombres ont été rangés : le plus grand dans la colonne A, le plus petit dans la colonne B.

La cellule A2 contient donc le plus grand des deux nombres B1 et C1. **La formule entrée en A2 est =MAX(B1;C1)** (et, de même, B2 contient =MIN(B1;C1)). On vérifie sur les lignes suivantes : MAX(36 ; 18) $=$ 36 $=$ A5 et MAX(18 ; 18) $=$ 18 $=$ A6.

3. La feuille applique l'algorithme des différences : on remplace le couple de nombres par le plus petit des deux et leur différence, jusqu'à obtenir une différence nulle (C6 $=$ 0). La dernière différence non nulle est celle de la cellule C5. **Le nombre 18 de la cellule C5 est le PGCD de 216 et 126.**

4. Le PGCD de 216 et 126 est 18, et non 1 : les deux nombres ont un diviseur commun autre que 1, donc **la fraction $\dfrac{216}{126}$ n'est pas irréductible**. On simplifie par le PGCD : $216 = 18 \times 12$ et $126 = 18 \times 7$, donc $\dfrac{216}{126} = \dfrac{18 \times 12}{18 \times 7} = \dfrac{12}{7}$. **La forme irréductible est $\dfrac{12}{7}$.**

> 💡 **Astuce.** Diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD donne directement la fraction irréductible, en une seule étape.

Exercice 2 – Problème de Fibonacci : théorème de Pythagore *(3 pts)*

Une fois la lance écartée, elle forme avec le mur et le sol un triangle rectangle (la tour est perpendiculaire au sol) : l'hypoténuse est la lance (20 pieds), un côté de l'angle droit est l'écart au pied de la tour (12 pieds) et l'autre côté est la hauteur d atteinte sur le mur.

D'après le **théorème de Pythagore** : $20^2 = 12^2 + d^2$, donc $d^2 = 400 - 144 = 256$ et $d = \sqrt{256} = 16$ pieds.

Au départ, l'extrémité haute de la lance était à 20 pieds du sol ; elle est maintenant à 16 pieds. Elle descend donc de $h = 20 - 16 = 4$ pieds. **L'autre extrémité de la lance descend de 4 pieds le long du mur**, soit environ $4 \times 30 = 120$ cm.

Exercice 3 – Vrai, faux ou on ne peut pas savoir : géométrie *(6 pts)*

1. Faux. Tout triangle peut être inscrit dans un cercle (son cercle circonscrit), mais il n'est pas toujours rectangle. Contre-exemple : un triangle équilatéral est inscrit dans son cercle circonscrit et ses trois angles

mesurent 60°. Un triangle inscrit dans un cercle n'est rectangle que si l'un de ses côtés est un diamètre du cercle.

2. Vrai. La médiatrice d'un segment [AB] est l'ensemble des points situés à égale distance de A et de B. Si M est sur la médiatrice de [AB], alors $MA = MB$: le triangle AMB a deux côtés égaux, il est isocèle en M. (Si M est le milieu de [AB], les trois points sont alignés et le « triangle » est aplati.)

3. On ne peut pas savoir. On connaît seulement $BC = 8$ cm et $\widehat{ABC} = 60°$, et la figure ne respecte pas les mesures. Aucun angle droit n'est codé en A : on ne peut donc pas utiliser la trigonométrie dans un triangle rectangle. Si le triangle était rectangle en A, on aurait $AB = BC \times \cos 60° = 8 \times 0{,}5 = 4$ cm, mais rien ne permet de l'affirmer : pour un autre angle en A, AB aurait une autre longueur.

4. Vrai. D'après le codage, les quatre côtés de ABCD ont la même longueur : ABCD est un losange. Il possède de plus un angle droit en A. Or **un losange qui a un angle droit est un carré**. ABCD est donc un carré (même si la figure, qui ne respecte pas les mesures, ne le montre pas).

> ⚠ **Piège.** L'énoncé prévient que les figures ne respectent ni les longueurs ni les angles : seules les données écrites et le codage comptent. Un angle qui « a l'air droit » sans codage ne peut pas être utilisé (affirmation 3), et un quadrilatère qui « n'a pas l'air d'un carré » peut en être un (affirmation 4).

Exercice 4 – Pyramide du Louvre : volume et réduction *(5 pts)*

Dimensions du réservoir. Dans une réduction à l'échelle $\dfrac{1}{500}$, toutes les longueurs sont divisées par 500 :

- côté de la base : $35 \text{ m} \div 500 = 0{,}07 \text{ m} = 7 \text{ cm}$;
- hauteur : $22 \text{ m} \div 500 = 0{,}044 \text{ m} = 4{,}4 \text{ cm}$.

Volume du réservoir. $V = \dfrac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur} = \dfrac{1}{3} \times 7^2 \times 4{,}4 = \dfrac{49 \times 4{,}4}{3} = \dfrac{215{,}6}{3} \approx 71{,}87 \text{ cm}^3$.

(Autre méthode : le volume de la vraie pyramide est $\dfrac{1}{3} \times 35^2 \times 22 = \dfrac{26\,950}{3} \approx 8\,983{,}33 \text{ m}^3$; dans une réduction de rapport $k = \dfrac{1}{500}$, les volumes sont multipliés par $k^3 = \dfrac{1}{125\,000\,000}$, ce qui donne le même résultat, environ $0{,}00007187 \text{ m}^3$, soit $71{,}87 \text{ cm}^3$.)

Durée de combustion. La lampe brûle 4 cm³ d'huile par heure : $t = \dfrac{215{,}6}{3} \div 4 = \dfrac{215{,}6}{12} \approx 17{,}97 \text{ h}$.

Il ne restera plus d'huile dans le réservoir au bout d'environ 18 heures.

> 💡 **Astuce.** Convertis les dimensions réduites en cm dès le début : le volume sort alors directement en cm³, la même unité que la consommation de la lampe, et tu évites les conversions de m³ en cm³.

Exercice 5 – Développement et calcul astucieux *(3 pts)*

1. On reconnaît l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ avec $a = 2n$ et $b = 5$: $(2n+5)(2n-5) = (2n)^2 - 5^2$. $(2n+5)(2n-5) = 4n^2 - 25$.

2. On choisit $n = 100$: alors $2n + 5 = 205$ et $2n - 5 = 195$. D'après la question 1 : $205 \times 195 = 4 \times 100^2 - 25 = 40\,000 - 25 = 39\,975$. $205 \times 195 = 39\,975$.

Exercice 6 – Itinéraire Lille – Marseille : vitesse, durée, carburant *(6 pts)*

1. Sur autoroute : distance 993 km, durée 8 h 31 min. On convertit la durée en heures : 8 h 31 min $= 8 + \dfrac{31}{60}$ h $= \dfrac{511}{60}$ h. Vitesse moyenne : $v = \dfrac{d}{t} = 993 \div \dfrac{511}{60} = \dfrac{993 \times 60}{511} \approx 116{,}6$ km/h. **L'itinéraire prévoit une vitesse moyenne d'environ 117 km/h sur autoroute.**

2. Le temps de conduite prévu est de 8 h 47 min. Il faut au moins une pause de 10 minutes après chaque tranche de deux heures de conduite : après 2 h, 4 h, 6 h et 8 h de conduite, soit 4 pauses (il reste ensuite 47 min de route, moins de 2 h). Durée minimale des pauses : $4 \times 10 = 40$ min. Durée totale : 8 h 47 min + 40 min = 9 h 27 min. **Julien doit prévoir au minimum 9 h 27 min pour son voyage.**

3. D'après le site, le carburant coûte 89,44 €. Au prix de 1,42 € le litre, cela représente $\dfrac{89{,}44}{1{,}42} \approx 62{,}99$ L, soit environ 63 L. Or le réservoir ne contient que 60 L, et $63 > 60$. **Non, d'après les données du site, Julien ne peut pas faire le trajet avec un seul plein : il lui manque environ 3 L.**

> ⚠ **Piège.** 8 h 31 min ne s'écrit pas 8,31 h : 31 minutes font $\dfrac{31}{60} \approx 0{,}52$ h. Avec 8,31 h, on trouverait une vitesse fausse d'environ 119 km/h.

Exercice 7 – Conversion de températures : fonction affine *(7 pts)*

1. On part de 0 °C : $0 \times 1{,}8 + 32 = 32$. **Le thermomètre indiquerait 32 °F.**

2. On cherche la température x en degrés Celsius telle que $1{,}8x + 32 = 212$. Alors $1{,}8x = 180$ et $x = \dfrac{180}{1{,}8} = 100$. **Le thermomètre indiquerait 100 °C : l'eau bout** (l'eau bout à 100 °C au niveau de la mer).

3. a) On multiplie x par 1,8 puis on ajoute 32 : $f(x) = 1{,}8x + 32$.

3. b) f est de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = 1{,}8$ et $b = 32$. **C'est une fonction affine.**

3. c) $f(5) = 1{,}8 \times 5 + 32 = 9 + 32 = 41$. **L'image de 5 par f est 41.**

3. d) On résout $f(x) = 5$: $1{,}8x + 32 = 5$, donc $1{,}8x = -27$ et $x = \dfrac{-27}{1{,}8} = -15$. Vérification : $1{,}8 \times (-15) + 32 = -27 + 32 = 5$. **L'antécédent de 5 par f est -15.**

3. e) $f(10) = 50$ signifie que l'image de 10 par f est 50. **Une température de 10 °C correspond à une température de 50 °F.**

> 💡 **Astuce.** L'image se calcule (on remplace x par le nombre) ; l'antécédent se trouve en résolvant une équation. Vérifie toujours ton antécédent en calculant son image.

Conseils pour le jour J

Sujet de sept exercices indépendants où les points se gagnent surtout par la rédaction : dans l'exercice 3, chaque réponse « vrai », « faux » ou « on ne peut pas savoir » doit être justifiée par une propriété ou un contre-exemple, sinon elle ne rapporte presque rien.

Attention aux conversions : les durées en heures et minutes (exercice 6) et les longueurs de la réduction (exercice 4). Pose chaque conversion par écrit avant le calcul, et vérifie que ton résultat est vraisemblable (une vitesse sur autoroute vers 117 km/h, une lampe qui brûle quelques heures et non quelques minutes).

Pour l'exercice 1, prends le temps d'observer le tableau ligne par ligne : la question 2 se résout en comparant chaque ligne à la précédente. Garde la trace de tes essais, ils sont valorisés.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).