Corrigé – Brevet 2013 – mathématiques – Pondichéry

Vrai ou faux : racines, diviseurs, solides et Thalès, Statistiques sur la germination du blé, Poids sur la Lune et profondeur d'un cratère, Tableur et équation du second degré, Pyramide régulière et réduction, Vitesse du rover Curiosity et du signal radio

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Vrai ou faux : racines, diviseurs, solides et Thalès *(5 pts)*

Affirmation 1. On reconnaît l'identité remarquable $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ avec $a=\sqrt{5}$ et $b=1$: $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)=(\sqrt{5})^2-1^2=5-1=4$. **4 est un nombre entier : l'affirmation 1 est vraie.**

Affirmation 2. Les diviseurs de 4 sont 1, 2 et 4, car $4=1\times 4=2\times 2$. Le nombre 4 admet donc trois diviseurs. **L'affirmation 2 est fausse.**

Affirmation 3. Un cube a 6 faces, une pyramide à base carrée a 5 faces (la base et 4 faces triangulaires) et un pavé droit a 6 faces. Au total : $6+5+6=17$. **L'affirmation 3 est vraie.**

Affirmation 4. Sur la figure, les droites (AC) et (BD) se coupent en O, avec OA = 2,8 cm, OB = 2 cm, OD = 3,5 cm et OC = 5 cm. Les points A, O, C sont alignés, ainsi que B, O, D.
D'une part $\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{2{,}8}{5}=0{,}56$; d'autre part $\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{2}{3{,}5}\approx 0{,}571$.
Pour vérifier sans valeur approchée, on compare les produits en croix : $2{,}8\times 3{,}5=9{,}8$ et $5\times 2=10$. Comme $9{,}8\neq 10$, on a $\dfrac{OA}{OC}\neq\dfrac{OB}{OD}$.
Or, si les droites (AB) et (CD) étaient parallèles, le **théorème de Thalès** donnerait l'égalité de ces rapports.
Les droites (AB) et (CD) ne sont donc pas parallèles : l'affirmation 4 est fausse.

> ⚠ **Piège.** Dans une configuration « papillon », associe bien les longueurs : A et C sont sur la même droite, B et D sur l'autre. On compare donc $\dfrac{OA}{OC}$ et $\dfrac{OB}{OD}$, et non $\dfrac{OA}{OB}$ et $\dfrac{OC}{OD}$ au hasard.

Exercice 2 – Statistiques sur la germination du blé *(8 pts)*

1. Les plantules qui mesurent au plus 12 cm sont celles de 0, 8 et 12 cm : $1+2+2=5$. **5 plantules mesurent au plus 12 cm.**

2. L'étendue est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur : $22-0=22$. **L'étendue de la série est 22 cm.**

3. L'effectif total est $1+2+2+4+2+2+3+3+4+4+2=29$. La moyenne pondérée vaut :
$$m=\frac{0\times 1+8\times 2+12\times 2+14\times 4+16\times 2+17\times 2+18\times 3+19\times 3+20\times 4+21\times 4+22\times 2}{29}$$
$$m=\frac{0+16+24+56+32+34+54+57+80+84+44}{29}=\frac{481}{29}\approx 16{,}59.$$
La moyenne est d'environ 16,6 cm (arrondie au dixième).

4. L'effectif total, 29, est impair : la médiane est la valeur de rang $\dfrac{29+1}{2}=15$ dans la série rangée par ordre croissant. Effectifs cumulés : 1 (0 cm), 3 (8 cm), 5 (12 cm), 9 (14 cm), 11 (16 cm), 13 (17 cm), 16 (18 cm). Les valeurs de rang 14 à 16 sont égales à 18 cm. **La médiane est 18 cm.**
Interprétation : au moins la moitié des plantules mesurent 18 cm ou moins, et au moins la moitié mesurent 18 cm ou plus.

5. Les élèves qui ont bien respecté le protocole sont ceux dont la plantule mesure 14 cm ou plus : $29 - 5 = 24$ élèves. Le pourcentage est $\dfrac{24}{29} \times 100 \approx 82{,}8$. **Environ 83 % des élèves ont bien respecté le protocole.**

6. Avec la donnée du professeur, la série compte 30 valeurs. L'effectif est pair : la médiane est la moyenne des valeurs de rang 15 et 16. Notons t la taille obtenue par le professeur.

- Si $t < 18$, la valeur t se place avant les 18 cm : toutes les valeurs de rang 14, 15 et 16 de l'ancienne série reculent d'un rang et deviennent les valeurs de rang 15, 16 et 17. Les valeurs de rang 15 et 16 sont donc 18 et 18.
- Si $t \geqslant 18$, les 13 valeurs inférieures à 18 et les trois premières valeurs égales à 18 gardent leur rang (on peut ranger t après elles) : les valeurs de rang 14, 15 et 16 valent toujours 18.

Dans tous les cas, les valeurs de rang 15 et 16 sont égales à 18 cm, donc la médiane vaut $\dfrac{18+18}{2} = 18$. **Quelle que soit la taille relevée par le professeur, la médiane reste égale à 18 cm.**

> 💡 **Astuce.** Les effectifs cumulés évitent de réécrire les 29 valeurs : tu repères tout de suite dans quelle colonne tombe le rang cherché.

Exercice 3 – Poids sur la Lune et profondeur d'un cratère *(6 pts)*

1. On applique $P = m \times g_T$ avec $m = 70$ kg et $g_T = 9{,}8$: $P = 70 \times 9{,}8 = 686$. **Sur Terre, cet homme pèse 686 N.**

2. a) On calcule le quotient du poids par la masse dans chaque colonne :
$\dfrac{5{,}1}{3} = 1{,}7$; $\dfrac{17}{10} = 1{,}7$; $\dfrac{42{,}5}{25} = 1{,}7$; $\dfrac{68}{40} = 1{,}7$; $\dfrac{93{,}5}{55} = 1{,}7$.
Tous les quotients sont égaux. **Le tableau est un tableau de proportionnalité**, de coefficient 1,7.

2. b) Sur la Lune, $P = m \times g_L$, donc $g_L = \dfrac{P}{m}$, qui est le coefficient de proportionnalité trouvé au a). $g_L = 1{,}7$ (en N/kg).

2. c) Pour une même masse, le rapport des poids sur Terre et sur la Lune est $\dfrac{g_T}{g_L} = \dfrac{9{,}8}{1{,}7} \approx 5{,}8$. Par exemple, l'homme de 70 kg pèse 686 N sur Terre et $70 \times 1{,}7 = 119$ N sur la Lune, et $686 \div 119 \approx 5{,}8$. **C'est vrai : on pèse environ 6 fois moins lourd sur la Lune que sur la Terre.**

3. a) Les rayons solaires passent par C et B : l'angle $\widehat{BCD}$ mesure $4{,}3^\circ$. Dans le triangle BCD rectangle en D, CD = 29 km est le côté adjacent à l'angle $\widehat{BCD}$ et BD le côté opposé. D'après la **trigonométrie** :
$\tan\widehat{BCD} = \dfrac{BD}{CD}$, donc $BD = CD \times \tan 4{,}3^\circ = 29 \times \tan 4{,}3^\circ \approx 2{,}18$.
La profondeur BD du cratère est d'environ 2,2 km (arrondie au dixième).

3. b) CD représente 20 % du diamètre AB, donc $0{,}2 \times AB = 29$, d'où $AB = \dfrac{29}{0{,}2} = 145$. **Le diamètre AB du cratère mesure 145 km.**
Vérification : 20 % de 145 km, c'est $0{,}2 \times 145 = 29$ km.

> ⚠ **Piège.** Vérifie que ta calculatrice est en mode degrés avant de calculer $\tan 4{,}3^\circ$: en radians, tu obtiendrais un résultat absurde.

Exercice 4 – Tableur et équation du second degré *(4 pts)*

1. La cellule B17 calcule $2x^2 - 3x - 9$ pour $x = 6$: $2 \times 6^2 - 3 \times 6 - 9 = 2 \times 36 - 18 - 9 = 72 - 27 = 45$. **On obtient 45 dans la cellule B17.**

2. On cherche dans la colonne B les cellules qui affichent 0 : ce sont B3 (pour $x = -1{,}5$) et B12 (pour $x = 3$). Vérification : $2 \times 3^2 - 3 \times 3 - 9 = 18 - 9 - 9 = 0$ et $2 \times (-1{,}5)^2 - 3 \times (-1{,}5) - 9 = 4{,}5 + 4{,}5 - 9 = 0$. **Les nombres $-1{,}5$ et 3 sont solutions de l'équation $2x^2 - 3x - 9 = 0$.**

3. L'aire du rectangle ABCD est :
$(2x + 3)(x - 3) = 2x^2 - 6x + 3x - 9 = 2x^2 - 3x - 9$.
C'est exactement l'expression de la colonne B. On cherche donc x tel que $2x^2 - 3x - 9 = 5$: le tableur affiche 5 pour $x = -2$ et pour $x = 3{,}5$.
Mais les longueurs doivent être positives : il faut $x - 3 > 0$, soit $x > 3$, ce qui exclut $x = -2$. Pour $x = 3{,}5$: $2x + 3 = 10$ cm et $x - 3 = 0{,}5$ cm, et $10 \times 0{,}5 = 5$. **Pour $x = 3{,}5$, l'aire du rectangle est égale à 5 cm².**

Exercice 5 – Pyramide régulière et réduction *(7 pts)*

1. D'après la formule du volume d'une pyramide, $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$, donc aire de ABCD $= \dfrac{3V}{SH} = \dfrac{3 \times 108}{9} = \dfrac{324}{9} = 36$. **L'aire de ABCD est bien 36 cm².**
ABCD est un carré : $AB^2 = 36$, donc $AB = \sqrt{36} = 6$. **AB = 6 cm.**
Le triangle ABC est rectangle en B (angle d'un carré), donc d'après le **théorème de Pythagore** : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 36 + 36 = 72$, d'où $AC = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$ cm.
Le périmètre du triangle ABC vaut $AB + BC + AC = 6 + 6 + 6\sqrt{2}$. **Le périmètre de ABC est égal à $12 + 6\sqrt{2}$ cm.**

2. a) Dans une réduction de coefficient k, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3. Ici $k^2 = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$, donc $k = \dfrac{1}{3}$. Le volume de SMNOP est $V' = k^3 \times V = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \times 108 = \dfrac{108}{27} = 4$. **Le volume de la pyramide SMNOP est 4 cm³.**
Vérification : $MN = \sqrt{4} = 2$ cm et la hauteur vaut $9 \div 3 = 3$ cm, d'où $V' = \dfrac{4 \times 3}{3} = 4$ cm³.

2. b) Les longueurs sont multipliées par le coefficient de réduction $k = \dfrac{1}{3}$, donc le périmètre du triangle MNO est celui du triangle ABC divisé par 3 : $\dfrac{12 + 6\sqrt{2}}{3} = 4 + 2\sqrt{2}$ cm.
Vérification directe : MNOP est un carré d'aire 4 cm², donc $MN = NO = 2$ cm, et sa diagonale vaut $MO = 2\sqrt{2}$ cm (Pythagore : $MO^2 = 4 + 4 = 8$). Le périmètre de MNO est bien $2 + 2 + 2\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}$ cm. **Oui, Elise a raison.**

> ⚠ **Piège.** L'aire est divisée par 9 (de 36 à 4 cm²), mais les longueurs ne sont divisées que par 3 : le coefficient de réduction est la racine carrée du rapport des aires.

Exercice 6 – Vitesse du rover Curiosity et du signal radio *(6 pts)*

1. Le vol a duré 255 jours de 24 heures : $255 \times 24 = 6\,120$. **Le vol a duré 6 120 heures.**

2. La vitesse moyenne est $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{560\,000\,000 \text{ km}}{6\,120 \text{ h}} \approx 91\,503$ km/h.
La vitesse moyenne du rover est d'environ 91 500 km/h (arrondie à la centaine).
Vérification : $91\,500 \times 6\,120 = 559\,980\,000$ km, soit environ 560 millions de km.

3. Le signal parcourt $d = 248 \times 10^6$ km à $v = 300\,000$ km/s. Sa durée de trajet est :
$t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{248\,000\,000}{300\,000} \approx 826{,}7$ s.
Or $826{,}7 = 13 \times 60 + 46{,}7$, donc $t \approx 13$ min 47 s, soit environ 14 min à la minute près.
Les images partent à 7 h 48 min ; elles arrivent à 7 h 48 min + 13 min 47 s = 8 h 01 min 47 s. **Les premières images sont parvenues au centre de la NASA vers 8 h 02 min** (arrondi à la minute).

> 💡 **Astuce.** Pour convertir des secondes en minutes, divise par 60 : la partie entière donne les minutes, et le reste (ici $826{,}7 - 780 = 46{,}7$) donne les secondes. N'écris jamais « 13,78 min = 13 min 78 s ».

Conseils pour le jour J

Ce sujet comporte six exercices indépendants et beaucoup de questions rapides : commence par ce que tu maîtrises le mieux, mais n'oublie aucune affirmation de l'exercice 1, car chacune rapporte des points dès qu'elle est justifiée (un calcul, un contre-exemple, une comparaison de rapports). Une réponse « vrai » ou « faux » sans argument ne rapporte rien.

Les pièges de ce sujet sont surtout des pièges d'unités et de raisonnement : la calculatrice en degrés pour le cratère, la condition $x > 3$ pour que le rectangle existe, le coefficient $\frac{1}{3}$ (et non $\frac{1}{9}$) pour les longueurs de la pyramide, la conversion des secondes en minutes pour le signal de Curiosity.

Les questions marquées « toute trace de recherche sera prise en compte » méritent d'être tentées même si tu n'es pas sûr de toi : écris ta démarche, tes calculs intermédiaires et une phrase de conclusion. La maîtrise de la langue est notée sur 4 points : rédige des phrases complètes.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).