Corrigé – Brevet 2013 – mathématiques – Brevet Am du Sud nov 2013 (remplacement)

Salaires : pourcentage, moyenne et médiane, Périmètre et aire d'un champ : réciproque de Pythagore, Arithmétique (PGCD) et système d'équations, Ordre de grandeur : le débit de l'Amazone, Probabilités et propriétés des quadrilatères, Aire d'un rectangle de périmètre fixé : fonction et lecture graphique

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Salaires : pourcentage, moyenne et médiane *(6 pts)*

1. Diminuer une quantité de 22 % revient à la multiplier par $1 - \dfrac{22}{100} = 0{,}78$. D'après le document 1, le salaire moyen brut était de 2 764 € par mois : $2\,764 \times 0{,}78 = 2\,155{,}92$. **Le salaire net moyen d'un Français en 2010 était bien de 2 155,92 € par mois.**

2. Le salaire médian brut (1 610 € par mois en 2010) est le salaire qui partage la population en deux groupes de même effectif : **la moitié des salariés gagne moins de 1 610 € brut par mois, l'autre moitié gagne plus.**

3. Le salaire médian brut (1 610 €) est nettement inférieur au salaire moyen brut (2 764 €) : l'écart est de $2\,764 - 1\,610 = 1\,154$ € par mois. **Cette différence s'explique par l'existence de quelques salaires très élevés : ils font fortement augmenter la moyenne, alors qu'ils ne modifient pas la médiane**, qui dépend seulement du rang des salaires et non de leur valeur. Plus de la moitié des Français gagne donc moins que le salaire moyen.

4. D'après les documents 2 et 3, 8,6 millions de Français sur 65 millions vivaient sous le seuil de pauvreté en 2010 : $\dfrac{8{,}6}{65} \times 100 \approx 13{,}2$. **Environ 13 % des Français vivaient en 2010 sous le seuil de pauvreté.**

> 💡 **Astuce.** Dans un exercice à documents, cite toujours d'où vient chaque nombre (« d'après le document 3 ») : le correcteur voit que tu as su prélever la bonne information.

Exercice 2 – Périmètre et aire d'un champ : réciproque de Pythagore *(4 pts)*

1. a. Le périmètre du champ ABC vaut $AB + BC + AC = 154$ m, donc $AB = 154 - 56 - 65 = 33$ m.
Le périmètre du champ ADC vaut $AD + DC + AC = 144$ m, donc $DC = 144 - 16 - 65 = 63$ m. **On a bien AB = 33 m et DC = 63 m.**

1. b. Le contour du champ ABCD est formé des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA] (la diagonale [AC] est à l'intérieur) : $33 + 56 + 63 + 16 = 168$. **Le périmètre du champ ABCD est de 168 m.**

2. Dans le triangle ADC, le plus grand côté est [AC].
D'une part : $AC^2 = 65^2 = 4\,225$.
D'autre part : $AD^2 + DC^2 = 16^2 + 63^2 = 256 + 3\,969 = 4\,225$.
On a donc $AC^2 = AD^2 + DC^2$. D'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, **le triangle ADC est rectangle en D.**

3. L'aire d'un triangle rectangle est égale à la moitié du produit des côtés de l'angle droit.
Triangle ABC, rectangle en B : $\dfrac{AB \times BC}{2} = \dfrac{33 \times 56}{2} = 924$ m².
Triangle ADC, rectangle en D : $\dfrac{AD \times DC}{2} = \dfrac{16 \times 63}{2} = 504$ m².
Aire de ABCD : $924 + 504 = 1\,428$. **L'aire du champ ABCD est de 1 428 m².**

4. Pour clôturer le champ, il faut une longueur de grillage égale à son périmètre, soit 168 m : $168 \times 0{,}85 = 142{,}80$. **Jean-Michel va payer 142,80 €.**

> ⚠ **Piège.** La diagonale [AC] ne fait pas partie du contour du nouveau champ : ne l'ajoute ni dans le périmètre, ni dans la longueur de grillage.

Exercice 3 – Arithmétique (PGCD) et système d'équations *(7 pts)*

1. a. 840 et 1 176 sont tous les deux pairs (ils se terminent par 0 et par 6) : ils sont donc tous les deux divisibles par 2. Ils ont ainsi un diviseur commun autre que 1. **840 et 1 176 ne sont pas premiers entre eux.**

1. b. Il faut que 21 divise à la fois 840 et 1 176 : $840 \div 21 = 40$ et $1\,176 \div 21 = 56$, deux divisions exactes. **Oui, le pâtissier peut faire 21 lots, contenant chacun 40 financiers et 56 macarons.**

1. c. Le nombre de lots doit être un diviseur commun de 840 et de 1 176 ; le nombre maximal de lots est donc leur PGCD. Par l'**algorithme d'Euclide** :
$1\,176 = 1 \times 840 + 336$
$840 = 2 \times 336 + 168$
$336 = 2 \times 168 + 0$
Le dernier reste non nul est 168, donc $\text{PGCD}(840\ ;\ 1\,176) = 168$. Alors $840 \div 168 = 5$ et $1\,176 \div 168 = 7$. **Il peut faire au maximum 168 lots, composés chacun de 5 financiers et 7 macarons.**

2. Notons f le prix d'un financier et m le prix d'un macaron, en euros. Comme aucun prix n'a changé :
$5f + 7m = 22{,}40$ (cette année) et $8f + 14m = 42$ (l'année dernière).
En multipliant la première équation par 2 : $10f + 14m = 44{,}80$. En lui soustrayant la seconde : $10f - 8f = 44{,}80 - 42$, soit $2f = 2{,}80$ et $f = 1{,}40$.
On remplace dans la première équation : $5 \times 1{,}40 + 7m = 22{,}40$, donc $7m = 22{,}40 - 7 = 15{,}40$ et $m = 2{,}20$.
Vérification : $8 \times 1{,}40 + 14 \times 2{,}20 = 11{,}20 + 30{,}80 = 42$. **Un financier coûte 1,40 € et un macaron 2,20 €.**

Exercice 4 – Ordre de grandeur : le débit de l'Amazone *(3 pts)*

Volume d'eau écoulé en un an. Une année compte $365 \times 24 \times 3\,600 = 31\,536\,000$ secondes. Le fleuve débite donc en un an : $190\,000 \times 31\,536\,000 = 5\,991\,840\,000\,000$ m³, soit environ 6×10^{12} m³.
Comme 1 m³ = 1 000 L, cela fait environ $5{,}99 \times 10^{15}$ L.

Consommation d'un foyer en un an. $10\,000 \times 12 = 120\,000$ L, soit $1{,}2 \times 10^{5}$ L.

Nombre de foyers. $\dfrac{5\,991\,840\,000\,000\,000}{120\,000} = 49\,932\,000\,000 \approx 5 \times 10^{10}$.
Le fleuve pourrait alimenter en un an environ 50 milliards de foyers de 3 personnes (ordre de grandeur : 5×10^{10} foyers).

> 💡 **Astuce.** Avec de si grands nombres, passe à l'écriture scientifique dès que possible : les zéros oubliés sont la principale source d'erreur. Un rapide contrôle : 50 milliards, c'est plusieurs fois la population mondiale, ce qui montre l'énormité du débit de l'Amazone.

Exercice 5 – Probabilités et propriétés des quadrilatères *(7 pts)*

Les dix étiquettes sont indiscernables au toucher : chaque étiquette a la même probabilité d'être tirée.

1. a. Une seule étiquette porte « Diagonales égales » sur les dix. **La probabilité est $\dfrac{1}{10}$.**

1. b. Trois étiquettes contiennent le mot « diagonales » : « Diagonales égales », « Diagonales qui se coupent en leur milieu » et « Diagonales perpendiculaires ». **La probabilité est $\frac{3}{10}$.**

1. c. Les cinq étiquettes qui parlent de côtés (« Côtés égaux deux à deux », « Deux côtés égaux seulement », « Quatre côtés égaux », « Côtés opposés parallèles », « Deux côtés parallèles seulement ») ne contiennent pas le mot « diagonales ». Aucune étiquette ne porte les deux mots : l'événement est impossible. **La probabilité est 0.**

2. a. C'est Madjid qui a raison. Un quadrilatère dont les diagonales sont égales et perpendiculaires n'est pas forcément un carré : il faut en plus que les diagonales se coupent en leur milieu. Contre-exemple : on trace deux segments [AC] et [BD] de 6 cm, perpendiculaires, qui se coupent au point situé à 2 cm de A sur [AC] et au milieu de [BD]. Le quadrilatère ABCD a des diagonales égales et perpendiculaires, mais ce n'est pas un carré (c'est un cerf-volant : AB = AD et CB = CD, mais AB ≠ CB).

2. b. Un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles est un parallélogramme ; un parallélogramme qui a ses quatre côtés égaux est un losange. **Julie est sûre d'obtenir un losange** (qui peut, dans un cas particulier, être un carré, puisqu'un carré est un losange particulier).

3. Un quadrilatère qui a quatre angles droits est un rectangle ; or dans un rectangle, les côtés opposés sont égaux deux à deux, donc il y a au moins deux paires de côtés égaux (et même quatre côtés égaux si c'est un carré). Il est impossible d'avoir « deux côtés égaux seulement ». **Lionel est déçu car aucun quadrilatère ne possède ces deux propriétés à la fois : il ne peut rien dessiner.**

> ⚠ **Piège.** Pour montrer qu'une affirmation (« c'est toujours un carré ») est fausse, il faut un contre-exemple précis : décris-le avec des mesures ou fais un schéma à main levée codé.

Exercice 6 – Aire d'un rectangle de périmètre fixé : fonction et lecture graphique *(9 pts)*

1. a. Le périmètre d'un rectangle vaut $2 \times (\text{longueur} + \text{largeur})$, donc longueur + largeur $= 31 \div 2 = 15{,}5$ cm. Si la longueur vaut 10 cm : $15{,}5 - 10 = 5{,}5$. **La largeur vaut 5,5 cm.**

1. b. Par exemple, pour une longueur de 12 cm : $15{,}5 - 12 = 3{,}5$. **Un rectangle de longueur 12 cm a une largeur de 3,5 cm** (vérification : $2 \times (12 + 3{,}5) = 31$ cm). Toute longueur comprise entre 7,75 cm et 15,5 cm convient de la même façon.

1. c. $2(AB + BC) = 31$, donc $AB + BC = 15{,}5$ et $BC = 15{,}5 - x$ (en cm).

1. d. L'aire d'un rectangle est le produit de sa longueur par sa largeur : $\mathcal{A} = AB \times BC = x(15{,}5 - x)$ (en cm²).

2. a. $f(4) = 4 \times (15{,}5 - 4) = 4 \times 11{,}5 = 46$. **$f(4) = 46$.**

2. b. $f(5) = 5 \times (15{,}5 - 5) = 5 \times 10{,}5 = 52{,}5$. **L'image de 5 est 52,5, donc 5 est bien un antécédent de 52,5 par f.**

3. a. On lit l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 3 : il se situe entre 35 et 40, un peu au-dessus de 35. **Pour x = 3 cm, l'aire vaut environ 37,5 cm²** (le calcul donne exactement $f(3) = 3 \times 12{,}5 = 37{,}5$).

3. b. On trace la droite horizontale d'ordonnée 40 : elle coupe la courbe en deux points, d'abscisses environ 3,3 et 12,2. **L'aire vaut 40 cm² pour x ≈ 3,3 cm et pour x ≈ 12,2 cm.**

3. c. Le sommet de la courbe a pour ordonnée environ 60 et pour abscisse environ 7,75 (entre 7 et 8, plus près de 8). **L'aire maximale est d'environ 60 cm², obtenue pour x ≈ 7,75 cm** (le calcul donne $f(7{,}75) = 7{,}75 \times 7{,}75 = 60{,}062\,5$).

4. Si AB = 7,75 cm, alors BC = 15,5 − 7,75 = 7,75 cm : le rectangle a deux côtés consécutifs égaux. **Le rectangle ABCD est alors un carré, et c'est lui qui a la plus grande aire (environ 60 cm²).**

> 💡 **Astuce.** Les questions 3 et 4 se répondent : parmi tous les rectangles de même périmètre, c'est le carré qui a la plus grande aire. Utilise la question 4 pour vérifier ta lecture du maximum.

Conseils pour le jour J

Ce sujet est très varié (statistiques, géométrie, arithmétique, ordre de grandeur, probabilités, fonctions) : commence par les exercices où tu te sens le plus à l'aise, mais numérote clairement chaque réponse. L'exercice 6, le plus long (9 points), enchaîne des questions faciles : ne le garde pas pour les dernières minutes.

Dans les exercices à documents (exercice 1) et à étiquettes (exercice 5), le vocabulaire compte autant que les calculs : explique ce qu'est une médiane avec une phrase complète, et nomme précisément les quadrilatères (parallélogramme, losange, rectangle, carré) en donnant la propriété qui justifie ta réponse.

Pour l'exercice 4, laisse une trace de chaque conversion (secondes dans une année, m³ en litres, consommation annuelle d'un foyer) : on attend un ordre de grandeur, donc un résultat arrondi, mais les étapes sont notées même si le calcul final est faux.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).