Corrigé – Brevet 2013 – mathématiques – Asie

Lecture graphique : débit d'une connexion internet, Vrai ou faux : PGCD, fractions, racines, développement, Trigonométrie et statistiques aux fléchettes, Programme de calcul et fonction carré, Budget et production de déchets, Pourcentages d'augmentation successifs, Volume d'un tronc de cône (moule à muffins), Longueur d'une piste cyclable : Pythagore, Thalès, arc de cercle

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Lecture graphique : débit d'une connexion internet *(3 pts)*

Sur le graphique, un carreau correspond à 0,25 km en abscisse et à 2,5 Mbit/s en ordonnée.

1. On place 2,5 km sur l'axe des abscisses, on monte verticalement jusqu'à la courbe, puis on lit l'ordonnée du point obtenu : la courbe passe par le point de coordonnées (2,5 ; 10). **Marie obtient un débit d'environ 10 Mbit/s.**

2. On cherche cette fois l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 20 : on part de 20 sur l'axe vertical, on va horizontalement jusqu'à la courbe et on redescend sur l'axe des abscisses. La courbe passe par le point (1,5 ; 20). **Paul habite à environ 1,5 km du central téléphonique.**

3. La courbe passe par le point (2 ; 15) et la fonction est décroissante : plus on s'éloigne du central, plus le débit diminue. Le débit est donc supérieur ou égal à 15 Mbit/s tant que la distance est inférieure ou égale à 2 km. **Il faut habiter au maximum à environ 2 km du central pour recevoir la télévision par internet.**

> 💡 **Astuce.** Repère d'abord la valeur d'un carreau sur chaque axe avant de lire quoi que ce soit, et laisse sur ta copie (ou sur le graphique s'il est en annexe) les pointillés de lecture : ils montrent ta méthode.

Exercice 2 – Vrai ou faux : PGCD, fractions, racines, développement *(4 pts)*

1. Faux. 36 est un multiple de 18 ($36 = 2 \times 18$), donc 18 divise à la fois 18 et 36 : c'est leur plus grand diviseur commun. **PGCD(18 ; 36) = 18** et non 9 (9 est un diviseur commun, mais pas le plus grand).

2. Vrai. $2 \times \dfrac{9}{4} = \dfrac{18}{4} = \dfrac{9 \times 2}{2 \times 2} = \dfrac{9}{2}$. **Le double de $\dfrac{9}{4}$ est bien $\dfrac{9}{2}$.**

3. Faux. $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 3^2 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 = 9 \times 5 = 45$. **Le carré de $3\sqrt{5}$ est 45, pas 15.**

4. Faux. On développe chaque membre. À gauche, avec l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$: $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$. À droite : $9 + 2x(2x+3) = 9 + 4x^2 + 6x$. Les deux expressions diffèrent ($12x$ d'un côté, $6x$ de l'autre). Contre-exemple pour $x = 1$: $(2 \times 1 + 3)^2 = 5^2 = 25$ alors que $9 + 2 \times 1 \times (2 \times 1 + 3) = 9 + 10 = 19$. **L'égalité n'est pas vraie pour tous les nombres x.**

> ⚠ **Piège.** Pour montrer qu'une affirmation « pour tous les nombres » est fausse, un seul contre-exemple suffit, mais il faut faire le calcul complet des deux côtés. En revanche, un exemple qui marche (ici $x = 0$ donne $9 = 9$) ne prouve jamais qu'elle est vraie.

Exercice 3 – Trigonométrie et statistiques aux fléchettes *(6 pts)*

1. Le mur est perpendiculaire au sol, donc le triangle CMP est rectangle en M. Dans ce triangle, on connaît le côté opposé à l'angle $\widehat{MPC}$ (CM = 1,73 m) et on cherche le côté adjacent MP : on utilise la **tangente**.
$\tan \widehat{MPC} = \dfrac{CM}{MP}$, donc $MP = \dfrac{CM}{\tan 36{,}1^\circ} = \dfrac{1{,}73}{\tan 36{,}1^\circ} \approx 2{,}372$ m.

Le joueur se trouve à environ 2,372 m du mur, ce qui est supérieur à 2,37 m : la distance est réglementaire. **La sonnerie ne va pas se déclencher.**

> ⚠ **Piège.** Le résultat est très proche de la limite : garde au moins trois décimales (2,372 m) pour pouvoir conclure, et vérifie que ta calculatrice est bien en mode degrés.

2. a. Somme des points de Rémi : $40+35+85+67+28+74+28=357$. Moyenne : $\dfrac{357}{7}=51$. **Rémi a obtenu en moyenne 51 points par partie.**

2. b. Si la moyenne de Nadia sur 7 parties vaut 51, le total de ses points est $51\times 7=357$. La somme des six résultats connus est $12+62+7+100+81+30=292$. Donc le résultat de la 6^{e} partie est $357-292=65$. **Nadia a obtenu 65 points à la 6^{e} partie.**

2. c. Chaque série compte 7 valeurs (nombre impair) : la médiane est la 4^{e} valeur de la série rangée dans l'ordre croissant, car il y a 3 valeurs avant et 3 après.
Rémi : 28 ; 28 ; 35 ; **40** ; 67 ; 74 ; 85. **La médiane de Rémi est 40 points.**
Nadia (avec 65 à la 6^{e} partie) : 7 ; 12 ; 30 ; **62** ; 65 ; 81 ; 100. **La médiane de Nadia est 62 points.**

Exercice 4 – Programme de calcul et fonction carré *(7 pts)*

1. Avec 3 : $3+5=8$, puis $8^2=64$. **On obtient 64.**
Avec -7 : $-7+5=-2$, puis $(-2)^2=4$. **On obtient 4.**

2. a. Pour obtenir 25, il suffit que la somme vaille 5, car $5^2=25$: le nombre choisi est alors $5-5=0$.
Vérification : $0+5=5$ et $5^2=25$. **On peut choisir 0.**

2. b. Le résultat du programme est le carré d'un nombre ; or un carré est toujours positif ou nul. **On ne peut donc pas obtenir -25.**

3. a. Si on note x le nombre choisi, on ajoute 5 (on obtient $x+5$) puis on prend le carré de cette somme. **La fonction f est $x\longmapsto (x+5)^2$.**

3. b. $f(-2)=(-2+5)^2=3^2=9$. **C'est vrai : -2 est un antécédent de 9 par la fonction f.**

4. a. $(x+5)^2=25$ équivaut à $(x+5)^2-5^2=0$, soit, avec l'identité $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$: $(x+5-5)(x+5+5)=0$, c'est-à-dire $x(x+10)=0$.
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x=0$ ou $x+10=0$, soit $x=-10$. **L'équation a deux solutions : 0 et -10.**

4. b. Obtenir 25 avec le programme revient à résoudre $f(x)=25$, c'est-à-dire l'équation précédente. **Les nombres que l'on peut choisir pour obtenir 25 sont 0 et -10.** Vérification avec -10 : $-10+5=-5$ et $(-5)^2=25$.

> 💡 **Astuce.** Un carré égal à 25 cache toujours deux possibilités : le nombre élevé au carré vaut 5 ou -5. C'est ce que la question 2. a. laissait de côté et que la question 4 fait apparaître.

Exercice 5 – Budget et production de déchets *(3 pts)*

1. Par mois, la ville dépense $50\,000\times 10=500\,000$ euros. Sur une année de 12 mois : $500\,000\times 12=6\,000\,000$ euros. **Le budget annuel de traitement des poubelles est de 6 000 000 €, soit 6 millions d'euros.**

2. On convertit d'abord en kilogrammes : 1 tonne $=1\,000$ kg, donc 30 millions de tonnes $=30\,000\,000\times 1\,000=30\,000\,000\,000$ kg.

Par habitant et par an : $\dfrac{30\,000\,000\,000}{65\,000\,000} \approx 461{,}5$ kg.
L'année 2009 compte 365 jours, donc par habitant et par jour : $\dfrac{461{,}5}{365} \approx 1{,}26$ kg. **C'est vrai : un habitant produisait environ 1,26 kg de déchets par jour, soit un peu plus de 1 kg.**

Exercice 6 – Pourcentages d'augmentation successifs *(3 pts)*

1. Augmenter une quantité de 11 % revient à la multiplier par $1 + \dfrac{11}{100} = 1{,}11$. Au premier trimestre 2012 : $28 \times 1{,}11 = 31{,}08$ millions. **Il y avait environ 31,1 millions de cyberacheteurs au premier trimestre 2012.**

2. Deux augmentations successives de 11 % reviennent à multiplier deux fois par 1,11 : $1{,}11 \times 1{,}11 = 1{,}2321$. Or multiplier par 1,2321 revient à augmenter de $0{,}2321 = 23{,}21$ %. Vérification : $28 \times 1{,}2321 \approx 34{,}5$ millions. **La progression sur les deux trimestres serait de 23,21 %.**

> ⚠ **Piège.** Les pourcentages successifs ne s'additionnent pas : la réponse n'est pas 22 %. La deuxième hausse de 11 % s'applique à un nombre déjà augmenté, d'où les 0,21 % supplémentaires.

Exercice 7 – Volume d'un tronc de cône (moule à muffins) *(4 pts)*

1. Une cavité est un grand cône (diamètre 7,5 cm, hauteur 12 cm) dont on a retiré le petit cône situé en dessous du fond de la cavité.
• Grand cône : rayon $R = 7{,}5 \div 2 = 3{,}75$ cm, hauteur 12 cm. $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi \times 3{,}75^2 \times 12 = 56{,}25\pi \approx 176{,}71$ cm³.
• Petit cône : sa hauteur est $12 - 4 = 8$ cm. La section par un plan parallèle à la base est une réduction du grand cône de coefficient $k = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$, donc son rayon vaut $r = 3{,}75 \times \dfrac{2}{3} = 2{,}5$ cm. $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi \times 2{,}5^2 \times 8 = \dfrac{50}{3}\pi \approx 52{,}36$ cm³.
• Volume d'une cavité : $V = V_1 - V_2 \approx 176{,}71 - 52{,}36 = 124{,}35$ cm³. **Le volume d'une cavité est d'environ 124,4 cm³, soit environ 125 cm³.**

2. Pour une cavité remplie aux trois quarts : $\dfrac{3}{4} \times 124{,}35 \approx 93{,}3$ cm³. Pour les 9 cavités : $9 \times 93{,}3 \approx 839{,}4$ cm³ (avec la valeur arrondie 125 cm³ : $9 \times \dfrac{3}{4} \times 125 = 843{,}75$ cm³).
Or 1 L = 1 dm³ = 1 000 cm³, et 839,4 cm³ < 1 000 cm³. **Léa a suffisamment de pâte pour remplir les 9 cavités aux trois quarts (il lui en restera environ 160 cm³).**

> 💡 **Astuce.** Pour le rayon du petit cône, tu peux aussi appliquer le théorème de Thalès dans la coupe verticale du cône : $\dfrac{r}{3{,}75} = \dfrac{8}{12}$.

Exercice 8 – Longueur d'une piste cyclable : Pythagore, Thalès, arc de cercle *(6 pts)*

Sur la figure, les codages indiquent que EB, AJ et les deux rayons de l'arc GH ont la même longueur, soit **48 m**. L'arc GH est un quart de cercle (angle droit codé au centre). La piste est formée de : [AE], [EF], [FG], l'arc GH, [HI], [IJ] et [JA].

Largeur du rectangle. Le triangle ABC est rectangle en B (ABCD est un rectangle). D'après le **théorème de Pythagore** : $AC^2 = AB^2 + BC^2$, donc $BC^2 = 312^2 - 288^2 = 97\,344 - 82\,944 = 14\,400$ et $BC = \sqrt{14\,400} = 120$ m. Ainsi $\mathbf{AD = BC = 120\ m}$ (vérification : $AJ + JD = 48 + 72 = 120$ m).

Segment [AE]. $AE = AB - EB = 288 - 48 = 240$ m.

Segments [EF] et [BF]. Dans le triangle ABC, E appartient à [AB], F appartient à [BC] et les droites (EF) et (AC) sont parallèles. D'après le **théorème de Thalès** : $\dfrac{BE}{BA} = \dfrac{BF}{BC} = \dfrac{EF}{AC}$, soit $\dfrac{48}{288} = \dfrac{BF}{120} = \dfrac{EF}{312}$.
Donc $EF = \dfrac{48 \times 312}{288} = 52$ m et $BF = \dfrac{48 \times 120}{288} = 20$ m. (Vérification : $BF + FG + GC = 20 + 52 + 48 = 120$ m $=$ BC.)

Segment [FG]. FG $= 52$ m (donné).

Arc GH. C'est un quart de cercle de rayon 48 m : $\dfrac{2\pi \times 48}{4} = 24\pi \approx 75{,}40$ m.

Segment [HI]. $HI = DC - DI - HC = 288 - 29 - 48 = 211$ m.

Segment [IJ]. Le triangle JDI est rectangle en D. D'après le **théorème de Pythagore** : $IJ^2 = JD^2 + DI^2 = 72^2 + 29^2 = 5\,184 + 841 = 6\,025$, donc $IJ = \sqrt{6\,025} \approx 77{,}62$ m.

Segment [JA]. JA $= 48$ m.

Longueur totale. $240 + 52 + 52 + 24\pi + 211 + \sqrt{6\,025} + 48 = 603 + 24\pi + \sqrt{6\,025} \approx 603 + 75{,}40 + 77{,}62 = 756{,}02$ m.
La piste cyclable mesure environ 756 m.

> 💡 **Astuce.** Dans un problème ouvert de ce type, fais la liste des morceaux de la piste avant de calculer, puis traite-les un par un avec un titre : même si tu ne termines pas, chaque longueur trouvée rapporte des points.

Conseils pour le jour J

Ce sujet comporte huit exercices courts, notés de 3 à 7 points : ne t'attarde pas sur un blocage, passe à la suite et reviens-y. Les exercices 1, 2, 5 et 6 sont rapides ; garde du temps pour l'exercice 8, un problème ouvert qui combine Pythagore (deux fois), Thalès et la longueur d'un arc de cercle.

Lis attentivement les codages des figures : à l'exercice 8, ce sont les petits traits identiques qui donnent le rayon de l'arc et la longueur AJ, sans qu'aucun nombre ne soit écrit. À l'exercice 3, sois précis dans l'arrondi : 2,372 m contre 2,37 m, c'est la conclusion qui en dépend.

Pour les questions « vrai ou faux », une réponse sans justification ne rapporte rien : un calcul ou un contre-exemple suffit, mais il doit être écrit. Et pense aux pourcentages successifs : ils se multiplient, ils ne s'ajoutent pas.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).