Corrigé – Brevet 2013 – mathématiques – Amérique du Nord

QCM : arbre, équation, pourcentage et périmètres, Mise en équation : les billets de la tirelire, Probabilités et pourcentage : l'équipement de roller, Arithmétique : les sachets de dragées (PGCD), Calcul littéral : le carré d'un nombre terminé par 0,5, Fonction et lecture graphique : le volume d'une boîte, Géométrie et trigonométrie : le Pentagone, Aire d'un trapèze

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – QCM : arbre, équation, pourcentage et périmètres *(4 pts)*

1. Sur un arbre de probabilité, la somme des probabilités portées par les branches issues d'un même nœud vaut 1. La probabilité manquante vaut donc $1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{9}{9} - \frac{1}{9} - \frac{3}{9} = \frac{5}{9}$. **Réponse c : $\frac{5}{9}$.**

2. Les 34 tables à 4 pieds totalisent $34 \times 4 = 136$ pieds. Il reste $169 - 136 = 33$ pieds pour les tables à 3 pieds, soit $33 \div 3 = 11$ tables. Vérification : $11 \times 3 + 34 \times 4 = 33 + 136 = 169$. **Réponse b : 11.**

3. Si 90 % de l'iceberg est sous l'eau, la partie visible représente $100 - 90 = 10$ % de l'ensemble. En considérant, comme le sujet, que la hauteur visible représente 10 % de la hauteur totale, on a $0{,}1 \times H = 35$, d'où $H = 35 \div 0{,}1 = 350$. **Réponse a : environ 350 m.**

4. La figure donnée est un rectangle dont on a retiré un demi-disque en haut (creux) et auquel on a ajouté un demi-disque en bas (bosse), de même diamètre d. Dans les deux cas, on remplace un segment de longueur d par un demi-cercle : son périmètre vaut donc $P_{\text{rectangle}} - 2d + 2 \times \frac{\pi d}{2}$. La figure **b** (deux bosses) subit exactement les mêmes modifications : même périmètre. La figure a (rectangle seul) a un périmètre plus petit, et la figure c (une seule bosse) remplace un seul segment par un demi-cercle. **Réponse b.**

> 💡 **Astuce.** Pour un périmètre, peu importe que le demi-cercle soit « rentrant » ou « sortant » : sa longueur est la même. Seule l'aire change.

Exercice 2 – Mise en équation : les billets de la tirelire *(4 pts)*

On note x le nombre de billets de 5 € ; Arthur possède 21 billets, donc il a $21 - x$ billets de 10 €. La somme totale vaut 125 €, d'où l'équation :

$$
\begin{aligned}
5x + 10(21 - x) &= 125 \\
5x + 210 - 10x &= 125 \\
-5x &= 125 - 210 \\
-5x &= -85 \\
x &= \frac{-85}{-5} = 17.
\end{aligned}
$$

Il a donc 17 billets de 5 € et $21 - 17 = 4$ billets de 10 €. Vérification : $17 \times 5 + 4 \times 10 = 85 + 40 = 125$ € et $17 + 4 = 21$ billets.

Arthur possède 17 billets de 5 € et 4 billets de 10 €.

> 💡 **Astuce.** Sans équation, on peut raisonner ainsi : si les 21 billets étaient des billets de 5 €, on aurait 105 €. Il manque 20 €, et chaque billet de 10 € remplacé rapporte 5 € de plus : il y a donc $20 \div 5 = 4$ billets de 10 €. Toute démarche juste et expliquée est acceptée.

Exercice 3 – Probabilités et pourcentage : l'équipement de roller *(6 pts)*

1. Caroline choisit au hasard une paire de rollers parmi 2 et un casque parmi 3 : il y a $2 \times 3 = 6$ équipements possibles, tous équiprobables. Leurs prix sont :

	Casque à 45 €	**Casque à 22 €**	**Casque à 29 €**
Rollers gris (87 €)	132 €	109 €	116 €
Rollers noirs (99 €)	144 €	121 €	128 €

Les ensembles qui coûtent moins de 130 € sont ceux à 109 €, 116 €, 121 € et 128 €, soit 4 issues favorables sur 6. $p = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$. **La probabilité que l'ensemble coûte moins de 130 € est $\dfrac{2}{3}$.**

2. a. L'ensemble rollers noirs + casque à 45 € coûte $99 + 45 = 144$ €. Une réduction de 20 % revient à payer 80 % du prix : $144 \times 0{,}8 = 115{,}2$. (Autre calcul : la réduction vaut $144 \times 0{,}2 = 28{,}80$ € et $144 - 28{,}80 = 115{,}20$ €.) **Après réduction, l'ensemble coûte 115,20 €.**

2. b. Oui. Cet ensemble coûtait 144 € (plus de 130 €) ; il coûte désormais 115,20 €, donc moins de 130 €. Les 5 autres prix ne changent pas. Il y a maintenant 5 issues favorables sur 6 : $p = \dfrac{5}{6}$. **La probabilité passe de $\dfrac{2}{3}$ à $\dfrac{5}{6}$.**

> ⚠ **Piège.** La réduction ne s'applique qu'à un seul ensemble (rollers noirs + casque à 45 €). Ne baisse pas tous les prix de 20 %.

Exercice 4 – Arithmétique : les sachets de dragées (PGCD) *(5 pts)*

1. Pour faire 76 sachets identiques, il faut que 76 divise à la fois 760 et 1 045. On a bien $760 = 76 \times 10$, mais $1\,045 \div 76 \approx 13{,}75$ n'est pas un entier ($76 \times 13 = 988$ et $76 \times 14 = 1\,064$). **Non, il ne peut pas faire 76 sachets** : les dragées aux amandes ne se répartiraient pas toutes.

2. a. Le nombre de sachets doit être un diviseur commun de 760 et de 1 045 ; le nombre maximal est donc leur PGCD. Par l'algorithme d'Euclide :

$1\,045 = 760 \times 1 + 285$
$760 = 285 \times 2 + 190$
$285 = 190 \times 1 + 95$
$190 = 95 \times 2 + 0$

Le PGCD est le dernier reste non nul : 95. **Flavien peut réaliser au maximum 95 sachets.**

2. b. $760 \div 95 = 8$ et $1\,045 \div 95 = 11$. Vérification : $95 \times 8 = 760$ et $95 \times 11 = 1\,045$. **Chaque sachet contient 8 dragées au chocolat et 11 dragées aux amandes.**

Exercice 5 – Calcul littéral : le carré d'un nombre terminé par 0,5 *(4 pts)*

1. Calcul de Julie : $3 \times 4 + 0{,}25 = 12 + 0{,}25 = 12{,}25$. Par ailleurs, $3{,}5^2 = 3{,}5 \times 3{,}5 = 12{,}25$. **Le résultat 12,25 est bien le carré de 3,5.**

2. On applique la même méthode : on multiplie la partie entière 7 par l'entier suivant 8, puis on ajoute 0,25 : $7 \times 8 + 0{,}25 = 56 + 0{,}25 = 56{,}25$. Vérification : $7{,}5 \times 7{,}5 = 56{,}25$. $7{,}5^2 = 56{,}25$**.**

3. On développe le membre de gauche avec l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:
$(n + 0{,}5)^2 = n^2 + 2 \times n \times 0{,}5 + 0{,}5^2 = n^2 + n + 0{,}25$.
On développe le membre de droite : $n(n+1) + 0{,}25 = n^2 + n + 0{,}25$.

Les deux expressions sont égales pour tout nombre n. **La conjecture de Julie est vraie :** $(n+0{,}5)^2 = n(n+1)+0{,}25$ **quel que soit** n**.**

> ⚠ **Piège.** Vérifier l'égalité sur un ou deux exemples (3,5 et 7,5) ne prouve rien : pour démontrer qu'elle est vraie « quel que soit n », il faut un calcul littéral.

Exercice 6 – Fonction et lecture graphique : le volume d'une boîte *(4 pts)*

1. On enlève à chaque coin un carré de côté x : sur chaque côté de 40 cm, on retire deux fois x. Il faut donc $2x < 40$, soit $x < 20$, et bien sûr $x > 0$. **Les valeurs possibles de x sont comprises strictement entre 0 et 20 cm :** $0 < x < 20$**.**

2. Pour $x = 5$ cm, le fond de la boîte est un carré de côté $40 - 2\times 5 = 30$ cm et la hauteur de la boîte vaut 5 cm. Le volume d'un pavé droit est longueur × largeur × hauteur : $V = 30 \times 30 \times 5 = 4\,500$. **Le volume de la boîte est 4 500 cm³.**

3. a. Le point le plus haut de la courbe a pour abscisse environ 6,7 (entre 6 et 7, plus près de 7), pour un volume d'environ 4 700 cm³. **Le volume est maximal pour $x \approx 6{,}7$ cm.**

3. b. On trace la droite horizontale d'ordonnée 2 000 : elle coupe la courbe en deux points, d'abscisses environ 1,5 et 14. **Pour un volume de 2 000 cm³, $x \approx 1{,}5$ cm ou $x \approx 14$ cm.**

> 💡 **Astuce.** Sur une lecture graphique, on attend une valeur approchée : écris « environ » et laisse les pointillés de lecture sur le graphique si on te le fournit en annexe. Ici, tu peux contrôler : $14 \times (40-28)^2 = 14 \times 144 = 2\,016$, très proche de 2 000.

Exercice 7 – Géométrie et trigonométrie : le Pentagone *(5 pts)*

1. Le pentagone est régulier et inscrit dans le cercle de centre O : les cinq angles au centre $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$ et $\widehat{EOA}$ sont égaux et font le tour complet (360°). $\widehat{AOB} = 360 \div 5 = 72$. $\widehat{AOB} = 72^\circ$**.**

2. a. Les points A et B sont sur le cercle de centre O, donc $OA = OB = 238$ m : le triangle AOB est isocèle en O. Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est aussi la bissectrice de l'angle au sommet, la médiane et la médiatrice de la base. **(OM) est donc à la fois la bissectrice de $\widehat{AOB}$ et la médiatrice de [AB].** (Autre justification : O est équidistant de A et B, donc O appartient à la médiatrice de [AB] ; cette médiatrice passe par O et est perpendiculaire à (AB), c'est donc la droite (OM).)

2. b. (OM) est la bissectrice de $\widehat{AOB}$, donc $\widehat{AOM} = 72 \div 2 = 36^\circ$. Dans le triangle AMO rectangle en M, on connaît l'hypoténuse $OA = 238$ m et on cherche le côté opposé à l'angle $\widehat{AOM}$. D'après la trigonométrie : $\sin\widehat{AOM} = \dfrac{AM}{OA}$, donc $AM = OA \times \sin 36^\circ = 238 \times \sin 36^\circ \approx 139{,}9$.
[AM] mesure environ 140 m.

2. c. (OM) est la médiatrice de [AB], donc M est le milieu de [AB] : $AB = 2 \times AM \approx 2 \times 140 = 280$ m. Le pentagone régulier a cinq côtés de même longueur : $P \approx 5 \times 280 = 1\,400$. **Le périmètre du Pentagone mesure environ 1 400 m.** (Avec la valeur non arrondie $AM \approx 139{,}89$ m, on obtient environ 1 399 m.)

> ⚠ **Piège.** Vérifie que ta calculatrice est en mode degrés : $\sin 36^\circ \approx 0{,}588$. Si tu obtiens un nombre négatif ou bizarre, elle est en radians.

Exercice 8 – Aire d'un trapèze *(4 pts)*

D'après les codages de la figure, $AB = 3$ cm et le segment allant de B au coin supérieur droit du rectangle pointillé mesure aussi 3 cm, comme la hauteur. Le rectangle pointillé mesure donc 7 cm sur 3 cm (on vérifie :

$1 + 3 + 3 = 7$).

1. a. Méthode : on calcule l'aire du rectangle pointillé de 7 cm sur 3 cm, puis on lui retire les aires des deux triangles rectangles situés de part et d'autre du trapèze (à gauche, un triangle de côtés de l'angle droit 1 cm et 3 cm ; à droite, un triangle de côtés de l'angle droit 3 cm et 3 cm).

1. b. Aire du rectangle : $7 \times 3 = 21$ cm².
Triangle de gauche : $\dfrac{1 \times 3}{2} = 1{,}5$ cm². Triangle de droite : $\dfrac{3 \times 3}{2} = 4{,}5$ cm².
Aire de ABCD : $21 - 1{,}5 - 4{,}5 = 15$. **L'aire du trapèze ABCD est 15 cm².**

2. On teste les trois formules sur le trapèze ABCD, dont on connaît l'aire (15 cm²), avec $b = AB = 3$, $B = DC = 7$ et $h = 3$:

- $\dfrac{(b \times B) \times h}{2} = \dfrac{3 \times 7 \times 3}{2} = 31{,}5$: faux ;
- $\dfrac{(b + B) \times h}{2} = \dfrac{(3 + 7) \times 3}{2} = 15$: juste ;
- $2(b + B)h = 2 \times 10 \times 3 = 60$: faux.

Seule la deuxième formule redonne l'aire trouvée. On peut aussi l'expliquer : en accolant deux trapèzes identiques, l'un retourné, on obtient un parallélogramme de base $b + B$ et de hauteur h, d'aire $(b + B)h$; le trapèze en est la moitié. **La formule juste est $\mathcal{A} = \dfrac{(b + B)h}{2}$.**

Conseils pour le jour J

Ce sujet est une suite d'exercices courts et variés (36 points au total) : commence par ceux que tu maîtrises le mieux, mais recopie toujours le numéro de l'exercice et de la question. Dans le QCM, aucune justification n'est demandée : ne perds pas de temps à rédiger, mais fais tout de même le calcul au brouillon (la tache de l'arbre, les 169 pieds).

Les questions « Justifier », « Prouver » et « Expliquer votre choix » rapportent surtout par la rédaction : nomme la propriété (triangle isocèle, trigonométrie, PGCD par l'algorithme d'Euclide, identité remarquable), pose le calcul, puis conclus par une phrase. Pour l'exercice 5, une vérification sur des exemples ne vaut pas une démonstration.

Dans les exercices 2 et 8, même une recherche inachevée est prise en compte : écris tes essais, tes tableaux ou tes tests de formules plutôt que de laisser un blanc.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).