Corrigé – Brevet 2012 – mathématiques – Polynésie

QCM de calcul, PGCD et rangement de boîtes, probabilités, Réciproque de Thalès et de Pythagore, angle inscrit, pentagone régulier, Statistiques d'une école de danse et comparaison de deux tarifs

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Activités numériques – QCM de calcul, PGCD et rangement de boîtes, probabilités *(12 pts)*

Exercice 1

Ligne 1. L'inverse d'un nombre a est le nombre qui, multiplié par a, donne 1. Comme $1 \times 1 = 1$, **l'inverse de 1 est 1** (-1 est l'opposé de 1, pas son inverse).

Ligne 2. Le trait de fraction joue le rôle de parenthèses : on calcule tout le numérateur, puis tout le dénominateur, avant de diviser. $\dfrac{2+3}{4\times 7}$ **s'écrit aussi** $(2+3)\div(4\times 7)$**.**

Ligne 3. La multiplication est prioritaire sur l'addition : $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$, puis $2+\dfrac{1}{6}=\dfrac{12}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{13}{6}$. **La bonne réponse est** $\dfrac{13}{6}$**.**

Ligne 4. Pour $x=-4$: $x+4=-4+4=0$, donc l'expression vaut $0+0\times(2\times(-4)-5)=0+0=0$. **La bonne réponse est 0.**

> ⚠ **Piège.** Ne confonds pas l'inverse (le nombre qui donne 1 par multiplication) et l'opposé (le nombre qui donne 0 par addition) : l'inverse de 1 est 1, son opposé est -1.

Exercice 2

1. Les boîtes ont 12 cm de diamètre et la même hauteur que le carton (5 cm) : on ne peut en mettre qu'une couche. Dans la longueur : $84\div 12=7$ boîtes ; dans la largeur : $60\div 12=5$ boîtes. On peut donc ranger $7\times 5=35$ boîtes. **On peut ranger au maximum 35 boîtes dans un carton.**

2. Par l'algorithme d'Euclide : $84=60\times 1+24$; $60=24\times 2+12$; $24=12\times 2+0$. Le PGCD est le dernier reste non nul. **PGCD(84 ; 60) = 12.**
Vérification : $84=12\times 7$ et $60=12\times 5$, et 7 et 5 n'ont aucun diviseur commun autre que 1.

3. Pour que les boîtes se calent exactement les unes contre les autres, il faut un nombre entier de boîtes dans la longueur et dans la largeur : le diamètre (en cm) doit donc être un diviseur commun de 84 et de 60. Le plus grand diviseur commun de 84 et de 60 est leur PGCD, c'est-à-dire 12. Aucun diamètre plus grand que 12 cm ne divise à la fois 84 et 60. **Non, l'entreprise ne peut pas ranger de cette façon des boîtes de plus grand diamètre : 12 cm est le diamètre maximal.**

Exercice 3

Effectifs : 55 néo-calédoniens, 45 américains, donc $125-55-45=25$ polynésiens. Le touriste est choisi au hasard : les 125 issues sont équiprobables.

1. a. Il y a 45 américains : $P(A)=\dfrac{45}{125}=\dfrac{9}{25}=0{,}36$. $P(A)=\dfrac{9}{25}$**, soit 36 %.**

1. b. Parmi les 25 polynésiens, 8 parlent anglais, donc $25 - 8 = 17$ ne parlent pas anglais : $P(B) = \dfrac{17}{125} = 0{,}136$. $P(B) = \dfrac{17}{125}$**, soit 13,6 %.**

1. c. Parlent anglais : les 12 néo-calédoniens anglophones, les 45 américains et les 8 polynésiens anglophones, soit $12 + 45 + 8 = 65$ touristes. $P(C) = \dfrac{65}{125} = \dfrac{13}{25} = 0{,}52$. $P(C) = \dfrac{13}{25}$**, soit 52 %.**

2. Parlent français : tous les néo-calédoniens et tous les polynésiens, soit $55 + 25 = 80$ touristes (les américains ne parlent que l'anglais). La probabilité d'être compris en français est $\dfrac{80}{125} = \dfrac{16}{25} = 0{,}64$, contre $0{,}52$ en anglais. Comme $0{,}64 > 0{,}52$, **on a plus de chances de se faire comprendre en parlant français.**

> 💡 **Astuce.** Avant de calculer des probabilités, complète les effectifs manquants (ici les 25 polynésiens) : c'est l'oubli le plus fréquent, et toutes les questions en dépendent.

Activités géométriques – Réciproque de Thalès et de Pythagore, angle inscrit, pentagone régulier *(12 pts)*

Exercice 1

1. Les points O, I, K sont alignés dans cet ordre, ainsi que les points O, J, L, dans le même ordre (I ∈ [OK] et J ∈ [OL]).
$\dfrac{OI}{OK} = \dfrac{1{,}5}{2} = 0{,}75$ et $\dfrac{OJ}{OL} = \dfrac{1{,}65}{2{,}2} = 0{,}75$ (vérification : $2{,}2 \times 0{,}75 = 1{,}65$).
Les deux rapports sont égaux, donc d'après la **réciproque du théorème de Thalès**, les droites (IJ) et (KL) sont parallèles. **Oui, les deux bras du balancier sont parallèles.**

2. Dans le triangle ABC, le plus grand côté est [AC].
D'une part : $AC^2 = 25^2 = 625$.
D'autre part : $AB^2 + BC^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$.
On a $AC^2 = AB^2 + BC^2$, donc d'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle ABC est rectangle en B. Les droites (AB) et (BC) sont donc perpendiculaires. **Oui : la pièce [AB] forme un angle droit en B, elle est perpendiculaire à la droite (BC).**

> ⚠ **Piège.** L'angle droit est toujours **en face du plus grand côté** : ici [AC] est l'hypoténuse, donc l'angle droit est en B, entre [AB] et [BC]. Sur le dessin, B et C sont sur le flotteur : les mesures prouvent donc, à strictement parler, que [AB] est perpendiculaire au flotteur. C'est cette réciproque de Pythagore que le correcteur attend ; écris bien « rectangle en B ».

Exercice 2

1. On place deux points A et B tels que AB = 8 cm, puis le milieu O de [AB] ; on trace le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $8 \div 2 = 4$ cm.

2. Avec le rapporteur centré en O, on mesure un angle de 36° à partir de la demi-droite [OB) ; la demi-droite obtenue coupe le cercle en M. On a bien $\widehat{BOM} = 36°$.

3. L'angle inscrit $\widehat{MAB}$ et l'angle au centre $\widehat{MOB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{MB}$. D'après la propriété de l'angle inscrit, un angle inscrit mesure la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc : $\widehat{MAB} = \dfrac{36°}{2} = 18°$. $\widehat{MAB} = 18°$**.**
Vérification : le triangle AOM est isocèle en O (OA = OM = 4 cm) et $\widehat{AOM} = 180° - 36° = 144°$, donc $\widehat{MAO} = \dfrac{180° - 144°}{2} = 18°$.

4. On recopie la **proposition 2** : « Si le triangle AMB est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ dont l'un des diamètres est [AB] alors AMB est un triangle rectangle en M. » C'est la seule qui utilise les données de l'énoncé : M est sur le cercle de diamètre [AB]. La proposition 1 parle d'un triangle AME qui n'existe pas et suppose une égalité qu'on ne connaît pas ; la proposition 3 est fausse (O milieu de [AB] ne suffit pas, il faut que M soit sur le cercle).

5. Le triangle AMB est rectangle en M, d'hypoténuse [AB]. Dans ce triangle : $\cos\widehat{MAB} = \dfrac{AM}{AB}$, donc $AM = AB \times \cos 18° = 8 \times \cos 18° \approx 7{,}608$ cm. **AM ≈ 7,6 cm (arrondi au dixième).**
Vérification : $BM = 8 \times \sin 18° \approx 2{,}472$ et $7{,}608^2 + 2{,}472^2 \approx 57{,}88 + 6{,}11 \approx 64 = 8^2$.

6. On trace la perpendiculaire à (AB) passant par M ; elle recoupe le cercle en N. N est le symétrique de M par rapport à (AB) : il est sur le cercle, de l'autre côté de [AB], avec $\widehat{BON} = 36°$.

7. Comme $\widehat{BOM} = \widehat{BON} = 36°$, on a $\widehat{MON} = 72° = \dfrac{360°}{5}$: [MN] est un côté du pentagone régulier inscrit dans $\mathscr{C}$. Les sommets se suivent de $72°$ en $72°$: $\widehat{MOR} = 72°$ et $\widehat{ROA} = 72°$ (en effet $\widehat{MOA} = 180° - 36° = 144° = 2 \times 72°$, donc A est bien un sommet). **On place R sur le cercle, du même côté que M, tel que $\widehat{BOR} = 108°$ (ou au compas : RM = MN) ; on place S symétrique de R par rapport à (AB) (SN = MN).** On vérifie que NM = MR = RA = AS = SN.

> 💡 **Astuce.** Pour un pentagone régulier inscrit, garde l'écartement du compas égal à MN et reporte-le sur le cercle à partir de M puis de N : tu dois retomber exactement sur A, ce qui valide ta construction.

Problème – Statistiques d'une école de danse et comparaison de deux tarifs *(12 pts)*

Première partie

1. Effectif total : $5 + 2 + 4 + 5 + 4 = 20$ élèves. La fréquence en % s'obtient par effectif $\div$ 20 $\times$ 100 : $\dfrac{5}{20} = 25$ % et $\dfrac{2}{20} = 10$ %.

Âge des élèves	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**TOTAL**
Nombre d'élèves	5	2	4	5	4	**20**
Fréquence en %	**25**	**10**	20	25	20	100

2. La barre de 12 ans (hauteur 5) est déjà tracée : chaque ligne du quadrillage représente 1 élève. On trace, avec la même largeur : **une barre de hauteur 2 entre 13 et 14 ans, de hauteur 4 entre 14 et 15 ans, de hauteur 5 entre 15 et 16 ans et de hauteur 4 entre 16 et 17 ans.**

3. D'après le tableau, **la fréquence des élèves de 14 ans est de 20 %** ($\dfrac{4}{20} = 0{,}2$).

4. Élèves de 14 ans ou moins : $5 + 2 + 4 = 11$. **11 élèves ont 14 ans ou moins.**

5. a. Somme des âges : $12 \times 5 + 13 \times 2 + 14 \times 4 + 15 \times 5 + 16 \times 4 = 60 + 26 + 56 + 75 + 64 = 281$. Âge moyen : $\dfrac{281}{20} = 14{,}05$ ans, légèrement supérieur à 14.
Pour faire baisser la moyenne, il faut ajouter un élève plus jeune que la moyenne. Avec un élève de 15 ans : $\dfrac{281 + 15}{21} = \dfrac{296}{21} \approx 14{,}1$ ans, la moyenne augmente. Avec un élève de 13 ans : $\dfrac{281 + 13}{21} = \dfrac{294}{21} = 14$ ans.
Taraina va choisir l'élève de 13 ans.

5. b. La nouvelle troupe compte 21 élèves et la somme des âges vaut $281 + 13 = 294$. Âge moyen : $\dfrac{294}{21} = 14$ (vérification : $21 \times 14 = 294$). **L'âge moyen de la nouvelle troupe est exactement de 14 ans** : le groupe

peut s'inscrire dans la catégorie « Adolescents ».

Deuxième partie

1. Tarif individuel : $500 \times$ nombre d'inscriptions ; tarif groupe : $4\,000 + 300 \times$ nombre d'inscriptions.

Nombre d'inscriptions	**0**	**10**	**25**
Prix au tarif Individuel en F	**0**	5 000	**12 500**
Prix au tarif Groupe en F	**4 000**	7 000	**11 500**

Calculs : $500 \times 25 = 12\,500$; $4\,000 + 300 \times 0 = 4\,000$; $4\,000 + 300 \times 25 = 4\,000 + 7\,500 = 11\,500$.

2. On paie le forfait de 4 000 F puis 300 F par danseur : $G(x) = 300x + 4\,000$**.**

3. La fonction $x \longmapsto 500x$ est linéaire : sa représentation est une droite passant par l'origine. On la trace avec les points $(0\ ;0)$, $(10\ ;5\,000)$ et $(20\ ;10\,000)$; elle atteint 14 000 F pour $x = 28$.
La fonction $x \longmapsto 300x + 4\,000$ est affine : sa représentation est une droite qui coupe l'axe des ordonnées en 4 000. On la trace avec les points $(0\ ;4\,000)$, $(10\ ;7\,000)$ et $(20\ ;10\,000)$.

4. On trace la verticale d'abscisse 21 : elle coupe la droite du tarif groupe plus bas que celle du tarif individuel (au-delà de 20 élèves, la droite du tarif groupe est en dessous). On lit environ 10 300 F au tarif groupe contre 10 500 F au tarif individuel. **Pour 21 élèves, le tarif Groupe est le plus avantageux.**
Contrôle par le calcul : $I(21) = 500 \times 21 = 10\,500$ F et $G(21) = 300 \times 21 + 4\,000 = 10\,300$ F.

5. On cherche x tel que $I(x) = G(x)$:
$500x = 300x + 4\,000$
$200x = 4\,000$
$x = \dfrac{4\,000}{200} = 20$.
Vérification : $500 \times 20 = 10\,000$ et $300 \times 20 + 4\,000 = 10\,000$. **Pour 20 inscriptions, on paie le même prix (10 000 F) avec les deux tarifs** ; c'est l'abscisse du point d'intersection des deux droites.

> 💡 **Astuce.** Sur le graphique, une graduation verticale vaut 500 F : l'écart de 200 F à 21 élèves est difficile à lire. Laisse les pointillés de lecture visibles, puis confirme toujours ta lecture par un calcul rapide.

Conseils pour le jour J

Ce sujet ancien compte trois parties de 12 points (et 4 points pour la rédaction et la présentation). Rien n'y est difficile, mais beaucoup de points se perdent sur la rédaction : nomme toujours la propriété utilisée (réciproque de Thalès, réciproque de Pythagore, angle inscrit, cercle circonscrit à un triangle rectangle) et termine chaque calcul par une phrase de réponse.

Les questions de construction (cercle, symétrique, pentagone) et de graphique se font directement sur le sujet : garde un crayon bien taillé, laisse tous les traits de construction et les pointillés de lecture, ils sont notés. Pour le pentagone, souviens-toi que $360^\circ \div 5 = 72^\circ$.

Dans l'exercice des touristes, prends deux minutes pour poser tous les effectifs (polynésiens, anglophones, francophones) avant de répondre : une seule erreur de comptage fausserait trois réponses.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).