Corrigé – Brevet 2012 – mathématiques – Brevet AmduNord 8 juin 2012

Vrai ou faux, statistiques et puissances de 2, Thalès, volumes du cône et du cylindre, construction d'un carré, Échange avec le Mexique : effectifs, financement et voyage

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Activités numériques – Vrai ou faux, statistiques et puissances de 2 *(12 pts)*

Exercice 1

Affirmation 1 : vraie. En effectuant la division, $\frac{1}{8} = 1 \div 8 = 0{,}125$. Ce nombre s'écrit avec un nombre fini de chiffres après la virgule (c'est aussi $\frac{125}{1\,000}$, une fraction décimale). $\frac{1}{8}$ **est donc un nombre décimal.**

Affirmation 2 : fausse. On cherche tous les diviseurs de 72 en les associant par paires dont le produit vaut 72 : 1×72, 2×36, 3×24, 4×18, 6×12, 8×9. La liste des diviseurs est donc 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. **72 a douze diviseurs, et non cinq : l'affirmation est fausse.**

Affirmation 3 : vraie. On développe avec l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:
$(n-1)(n+1) + 1 = n^2 - 1^2 + 1 = n^2 - 1 + 1 = n^2$.
Comme n est un entier, **le résultat n^2 est toujours le carré d'un entier : l'affirmation est vraie.**
(Exemple : pour $n = 5$, $4 \times 6 + 1 = 25 = 5^2$.)

> ⚠ **Piège.** Pour prouver qu'une affirmation est vraie « toujours », un exemple ne suffit pas : il faut un calcul littéral valable pour tout n. En revanche, pour prouver qu'elle est fausse, un seul contre-exemple suffit (affirmation 4).

Affirmation 4 : fausse. Deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun est 1. Contre-exemple : 3 et 9 sont impairs, mais 3 divise 3 et 9 ($9 = 3 \times 3$). Leur PGCD vaut 3, et non 1. **Deux nombres impairs ne sont donc pas toujours premiers entre eux : l'affirmation est fausse.**

Exercice 2

1. Dans la classe n° 1, on compte 21 réponses : une fois 1, quatre fois 2, huit fois 3, cinq fois 6 et trois fois 7 ($1 + 4 + 8 + 5 + 3 = 21$). Le nombre total de livres empruntés est :
$1 \times 1 + 4 \times 2 + 8 \times 3 + 5 \times 6 + 3 \times 7 = 1 + 8 + 24 + 30 + 21 = 84$.
Moyenne de la classe n° 1 : $\frac{84}{21} = 4$ livres. La moyenne de la classe n° 2 est donnée : 4 livres. **Les deux classes ont le même nombre moyen de livres empruntés : 4 livres par élève.**

2. Dans la classe n° 1, les « grands lecteurs » sont ceux qui ont emprunté 6 ou 7 livres : $5 + 3 = 8$ élèves.
Dans la classe n° 2, l'effectif est 25 et la médiane vaut 5 : en rangeant les 25 réponses dans l'ordre croissant, la 13^{e} valeur vaut 5 ; les valeurs de la 13^{e} à la 25^{e} sont donc toutes supérieures ou égales à 5. Il y a ainsi au moins 13 « grands lecteurs ». **C'est la classe n° 2 qui a le plus de « grands lecteurs » (au moins 13 contre 8).**

> 💡 **Astuce.** Une médiane partage la série en deux moitiés : avec 25 valeurs, c'est la 13^{e}, donc au moins 13 valeurs sont supérieures ou égales à la médiane. C'est le réflexe à avoir dès qu'on ne connaît que les indicateurs d'une série.

3. Dans la classe n° 1, le maximum est 7 livres. Dans la classe n° 2, l'étendue (différence entre la plus grande et la plus petite valeur) vaut 8 : le maximum est égal au minimum augmenté de 8. Le minimum étant au moins

égal à 0, le maximum vaut au moins 8 livres, donc plus que 7. **L'élève qui a emprunté le plus de livres est dans la classe n° 2.**

Exercice 3

Chaque heure, le nombre de cellules est multiplié par 2. On note les résultats heure par heure :

Heure	**12 h**	**13 h**	**14 h**	**15 h**	**16 h**	**17 h**	**18 h**	**19 h**	**20 h**
Nombre de cellules	1	2	4	8	16	32	64	128	256

Au bout de n heures, il y a 2^n cellules. Or $2^7 = 128$, qui est inférieur à 200, et $2^8 = 256$, qui dépasse 200 : il faut attendre 8 heures après midi. **Léa notera pour la première fois plus de 200 cellules à 20 h (256 cellules).**

Activités géométriques – Thalès, volumes du cône et du cylindre, construction d'un carré *(12 pts)*

Exercice 1

Les points C, G, B d'une part et D, G, A d'autre part sont alignés (G est le point de croisement des segments [CB] et [AD]), et les droites (CD) et (AB) sont parallèles. D'après le **théorème de Thalès** (configuration « papillon ») :
$\dfrac{GC}{GB} = \dfrac{GD}{GA} = \dfrac{CD}{AB}$, soit $\dfrac{30}{45} = \dfrac{30}{45} = \dfrac{CD}{51}$.
Donc $CD = \dfrac{51 \times 30}{45} = \dfrac{1\,530}{45} = 34$.
Vérification : $\dfrac{34}{51} = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{30}{45} = \dfrac{2}{3}$. **L'assise mesure CD = 34 cm.**

Exercice 2

1. a) Le cylindre a pour rayon $AK = 1{,}5$ cm et pour hauteur 6 cm. Volume d'un cylindre = aire de la base × hauteur :
$V = \pi \times 1{,}5^2 \times 6 = \pi \times 2{,}25 \times 6 = 13{,}5\pi$. **La valeur exacte du volume du cylindre est bien $13{,}5\pi$ cm³.**

1. b) Les deux cônes sont identiques, de même sommet C, et leurs bases sont les deux bases du cylindre : la hauteur de chaque cône est donc la moitié de celle du cylindre, $6 \div 2 = 3$ cm. Volume d'un cône :
$\dfrac{\pi \times 1{,}5^2 \times 3}{3} = \pi \times 2{,}25 = 2{,}25\pi$.
Le sablier est formé de deux cônes : $V_1 = 2 \times 2{,}25\pi = 4{,}5\pi$. **La valeur exacte de V_1 est bien $4{,}5\pi$ cm³.**

1. c) $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{4{,}5\pi}{13{,}5\pi} = \dfrac{4{,}5}{13{,}5} = \dfrac{45}{135} = \dfrac{1}{3}$. **Le sablier occupe $\dfrac{1}{3}$ du volume du cylindre.**

> 💡 **Astuce.** Résultat à retenir : un cône a toujours un volume égal au tiers de celui du cylindre de même base et de même hauteur. Ici, les deux cônes de hauteur 3 cm « remplissent » ensemble un tiers du cylindre de hauteur 6 cm.

2. Le débit est de 240 cm³ par heure. Le temps d'écoulement de 12 cm³ est :
$t = \dfrac{12}{240} = 0{,}05$ h, et $0{,}05 \times 60 = 3$ min. **Le sablier mesure 3 minutes.**

Exercice 3

Le petit carré a une aire de 4 cm², donc son côté mesure $\sqrt{4} = 2$ cm. Sur la figure, le côté gauche du grand carré est partagé en deux segments codés de la même longueur, dont l'un a pour longueur le côté du petit carré : le côté du grand carré mesure donc $2 \times 2 = 4$ cm et son aire vaut $4^2 = 16$ cm².

Le carré cherché doit avoir une aire de $4 + 16 = 20$ cm², donc un côté c tel que $c^2 = 20$, soit $c = \sqrt{20} \approx 4{,}47$ cm. Cette longueur ne se mesure pas exactement à la règle : on l'obtient avec le **théorème de Pythagore**.

- On trace un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 2 cm et 4 cm (les côtés des deux carrés).
- D'après le théorème de Pythagore, son hypoténuse h vérifie $h^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$.
- On construit le carré qui a pour côté cette hypoténuse (à l'équerre et au compas).

Le carré construit sur l'hypoténuse a une aire de 20 cm², égale à la somme des aires des deux carrés (côté $\sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$ cm).

Problème – Échange avec le Mexique : effectifs, financement et voyage *(12 pts)*

Partie 1 - L'inscription des élèves

1. On complète le tableau. Total des 4^{e} : $84 + 22 + 62 = 168$. Total des 3^{e} : $320 - 168 = 152$. Élèves de 3^{e} faisant espagnol : $152 - 24 - 50 = 78$.

Seconde langue étudiée	**4^{e}**	**3^{e}**	**Total**
Espagnol	84	78	162
Allemand	22	24	46
Italien	62	50	112
Total	168	152	320

L'échange concerne les élèves de 3^{e} qui étudient l'espagnol. **78 élèves peuvent être concernés par cet échange.**

2. Il y a 152 élèves de 3^{e}. $\dfrac{24}{152} \approx 0{,}158$, soit environ 15,8 %. (Autre méthode : 12 % de 152 élèves représentent $152 \times 0{,}12 = 18{,}24$ élèves, et 24 est supérieur à 18,24.) **C'est vrai : les 24 participants représentent environ 15,8 % des élèves de 3^{e}, soit plus de 12 %.**

> ⚠ **Piège.** Le pourcentage se calcule par rapport à *tous* les élèves de 3^{e} (152), comme le dit la question, et non par rapport aux 78 hispanisants ni aux 320 élèves du tableau.

Partie II - Le financement

1. a) La recette est prévue pour 4 personnes ; pour 50 personnes, on multiplie toutes les quantités par $\dfrac{50}{4} = 12{,}5$ (proportionnalité) :

- bœuf haché : $500 \times 12{,}5 = 6\,250$ g, soit **6,25 kg** ;
- haricots rouges : $400 \times 12{,}5 = 5\,000$ g, soit **5 kg** ;
- oignons : $2 \times 12{,}5 = 25$, soit **25 gros oignons** ;
- concentré de tomate : $65 \times 12{,}5 = 812{,}5$ g, soit **812,5 g**.

1. b) La recette du repas est $50 \times 15 = 750$ €. Bénéfice = recette − dépenses $= 750 - 261 = 489$. **Le bénéfice du repas est de 489 €.**

2. a) Les 720 tickets ont la même chance d'être tirés et 3 tickets sont gagnants. $p = \dfrac{3}{720} = \dfrac{1}{240}$. **La probabilité de gagner l'un des lots est $\dfrac{1}{240}$.**

2. b) Un seul ticket gagne la mini-chaîne Hifi : **la probabilité de la gagner est $\frac{1}{720}$.**

3. La tombola rapporte $720 \times 2 = 1\,440$ € (les lots sont offerts, il n'y a pas de dépense). Avec le bénéfice du repas : $489 + 1\,440 = 1\,929$. **Les deux actions rapportent bien 1 929 €.**

Partie II - Le voyage

1. Les 1 929 € sont répartis équitablement entre les 24 élèves : $1\,929 \div 24 = 80{,}375$ € de réduction par élève. Participation par élève : $770{,}30 - 80{,}375 = 689{,}925$ €. (Vérification : $24 \times 770{,}30 = 18\,487{,}20$ € ; $18\,487{,}20 - 1\,929 = 16\,558{,}20$ € ; $16\,558{,}20 \div 24 = 689{,}925$ €.) **Chaque élève paie environ 690 € pour son billet d'avion.**

2. Durée du trajet en bus : $t = \frac{d}{v} = \frac{256}{80} = 3{,}2$ h. Or $0{,}2$ h $= 0{,}2 \times 60 = 12$ min, donc $t = 3$ h 12 min. Il faut arriver à 11 h 30 : 11 h $30 - 3$ h $12 = 8$ h 18. **Le bus doit partir de Caen au plus tard à 8 h 18.**

3. a) Mexico a 7 heures de retard sur la France : quand il est 17 h 24 à Mexico, il est 17 h $24 + 7$ h $= 24$ h 24, c'est-à-dire 0 h 24 le lendemain, en France. L'avion décolle à 13 h 30 (heure française) : de 13 h 30 à minuit, il s'écoule 10 h 30 min, puis de minuit à 0 h 24, encore 24 min, soit 10 h $30 + 24$ min $= 10$ h 54 min. **Le vol dure 10 h 54 min.**

3. b) On convertit la durée en heures : 54 min $= \frac{54}{60}$ h $= 0{,}9$ h, donc la durée vaut 10,9 h. Vitesse moyenne : $v = \frac{d}{t} = \frac{9\,079}{10{,}9} \approx 832{,}9$ km/h. (Vérification : $833 \times 10{,}9 \approx 9\,080$ km.) **La vitesse moyenne de l'avion est d'environ 833 km/h.**

Conseils pour le jour J

Ce sujet est découpé à l'ancienne (activités numériques, géométriques, problème) et rapporte surtout sur la justification : pour un « vrai ou faux », un exemple ne prouve jamais qu'une affirmation est toujours vraie, alors qu'un seul contre-exemple suffit à montrer qu'elle est fausse. À l'exercice des deux classes, sers-toi du sens de la médiane et de l'étendue : il n'y a rien à calculer, tout est dans les définitions.

Dans le problème, les questions s'enchaînent : remplis d'abord tout le tableau de la partie 1, puis garde le bénéfice du repas (489 €, et non la recette de 750 €) pour retrouver les 1 929 €. Pour les durées, ne confonds jamais 3,2 h et 3 h 20 : on multiplie la partie décimale par 60. Le décalage horaire est le piège classique : ramène les deux horaires à l'heure française avant de soustraire.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).