Corrigé – Brevet 2011 – mathématiques – Métropole

Dé coloré, bijoux en triangles et vrai ou faux, Angles, trigonométrie, cercles circonscrits et aquariums, Récupération d'eau de pluie : volumes, pourcentages et coût

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Activités numériques – Dé coloré, bijoux en triangles et vrai ou faux *(12 pts)*

Exercice 1

D'après le diagramme en bâtons, sur les 100 lancers on a obtenu : bleu 15 fois, rouge 16 fois, jaune 20 fois, vert 19 fois et noir 30 fois (total : $15+16+20+19+30=100$).

1. a) La fréquence est l'effectif divisé par l'effectif total : $f_{\text{jaune}}=\dfrac{20}{100}$. **La fréquence d'apparition du jaune est 0,2 (soit 20 %).**

1. b) $f_{\text{noir}}=\dfrac{30}{100}$. **La fréquence d'apparition du noir est 0,3 (soit 30 %).**

2. a) Le dé est équilibré : ses 6 faces ont la même probabilité d'apparaître. Une seule face est jaune. **La probabilité d'obtenir le jaune est** $\dfrac{1}{6}$ (environ 0,17).

2. b) Deux faces sur six sont noires. **La probabilité d'obtenir le noir est** $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ (environ 0,33).

2. (seconde question numérotée 2 dans le sujet) Les fréquences de la question 1 (0,2 et 0,3) sont proches mais différentes des probabilités (environ 0,17 et 0,33). C'est normal : 100 lancers est un petit nombre d'expériences, et les fréquences observées varient d'une série de lancers à l'autre (fluctuation d'échantillonnage). **Plus on effectue de lancers, plus les fréquences se rapprochent des probabilités.**

Exercice 2

Chaque bijou est formé de 8 triangles. En comptant sur la figure :

• bijou n° 1 : 4 triangles en métal (gris) et 4 en verre (blancs) ;

• bijou n° 2 : 2 triangles en métal et 6 en verre ;

• bijou n° 3 : 3 triangles en métal et 5 en verre.

Notons m le prix d'un triangle en métal et v le prix d'un triangle en verre (en euros).

Bijou n° 1 : $4m+4v=11$, donc, en divisant par 4 : $m+v=2{,}75$.

Bijou n° 2 : $2m+6v=9{,}10$, donc, en divisant par 2 : $m+3v=4{,}55$.

En soustrayant la première égalité à la seconde : $(m+3v)-(m+v)=4{,}55-2{,}75$, soit $2v=1{,}80$, donc $v=0{,}90$. Puis $m=2{,}75-0{,}90=1{,}85$.

Un triangle en verre coûte 0,90 € et un triangle en métal coûte 1,85 € (vérification : $4\times1{,}85+4\times0{,}90=7{,}40+3{,}60=11$ et $2\times1{,}85+6\times0{,}90=3{,}70+5{,}40=9{,}10$).

Bijou n° 3 : $3\times1{,}85+5\times0{,}90=5{,}55+4{,}50=10{,}05$. **Le bijou n° 3 revient à 10,05 €.**

> **Astuce.** Sans système d'équations, on peut raisonner ainsi : le bijou n° 1 contient 4 triangles de chaque sorte, donc une paire « 1 métal + 1 verre » coûte $11\div4=2{,}75$ €. Le bijou n° 2, c'est 2 paires (5,50 €) plus 4 triangles en verre : $9{,}10-5{,}50=3{,}60$ €, soit 0,90 € le triangle en verre.

Exercice 3

1. Affirmation 1 : fausse. D'après l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$: $(2a+3)^2 = 4a^2 + 12a + 9$, qui n'est pas égal à $4a^2 + 9$ dès que $a \neq 0$. Contre-exemple : pour $a = 1$, $(2\times 1+3)^2 = 5^2 = 25$ alors que $4\times 1^2 + 9 = 13$.

Affirmation 2 : fausse. Augmenter de 20 % revient à multiplier par 1,2 ; baisser de 20 % revient à multiplier par 0,8. Au total, le prix est multiplié par $1{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}96$ et non par 1. Exemple : un article à 100 € passe à 120 €, puis à $120 - 0{,}2\times 120 = 120 - 24 = 96$ €, et non 100 €. (La remise de 20 % porte sur le nouveau prix, plus élevé.)

> ⚠ **Piège.** Des pourcentages successifs ne s'additionnent pas : + 20 % puis − 20 % donne une baisse de 4 %.

2. Égalité 1 : vraie. $\dfrac{\sqrt{32}}{2} = \dfrac{\sqrt{16\times 2}}{2} = \dfrac{\sqrt{16}\times\sqrt{2}}{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

Égalité 2 : fausse. $10^5 + 10^{-5} = 100\,000 + 0{,}000\,01 = 100\,000{,}000\,01$, alors que $10^0 = 1$. La règle $10^n \times 10^p = 10^{n+p}$ concerne le **produit** et non la somme. Égalité corrigée : $10^5 \times 10^{-5} = 10^0$ (car $5 + (-5) = 0$). On peut aussi écrire $10^5 + 10^{-5} = 100\,000{,}000\,01$.

Activités géométriques – Angles, trigonométrie, cercles circonscrits et aquariums *(12 pts)*

Exercice 1

1. Construction en vraie grandeur : on trace le segment [DB] de 8 cm et on place C sur [DB] avec DC = 6 cm (donc CB = 2 cm). En B, on trace la perpendiculaire à (DB) et on place A, du côté opposé à E, avec BA = 2 cm. On trace la demi-droite [AC) au-delà de C. Le point E est sur cette demi-droite et vérifie $\widehat{CED} = 90^\circ$: c'est le pied de la perpendiculaire à (AC) passant par D (on peut aussi le placer à l'intersection de (AC) et du cercle de diamètre [DC]). On obtient CE = DE ≈ 4,2 cm.

2. a) Le triangle ABC est rectangle en B et AB = CB : il est **rectangle isocèle** en B. Ses deux angles aigus sont égaux et leur somme vaut $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, donc chacun mesure 45°. $\widehat{ACB} = 45^\circ$**.**

2. b) Les points A, C, E sont alignés et les points D, C, B sont alignés, donc les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{DCE}$ sont **opposés par le sommet** C ; ils ont donc la même mesure. $\widehat{DCE} = 45^\circ$**.**

3. Le triangle CED est rectangle en E, d'hypoténuse [CD]. Par rapport à l'angle $\widehat{DCE}$, le côté [DE] est le côté opposé, donc par le **sinus** : $\sin\widehat{DCE} = \dfrac{DE}{CD}$, d'où $DE = 6 \times \sin 45^\circ \approx 4{,}243$ cm. **DE ≈ 4,2 cm à 0,1 cm près.** (La valeur exacte est $3\sqrt{2}$ cm.)

4. Le triangle DCE est rectangle en E ; or le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le **milieu de son hypoténuse**. **Le centre du cercle $\mathscr{C}$ est le milieu du segment [DC]** ; son rayon est $6 \div 2 = 3$ cm. De même, ABC est rectangle en B, donc le cercle $\mathscr{C}'$ a pour centre le milieu de l'hypoténuse [AC] et pour rayon $\dfrac{AC}{2}$ (avec $AC = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ cm d'après le théorème de Pythagore, le rayon vaut environ 1,4 cm). Sur la copie, on trace ces deux cercles.

5. Le point M est sur le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [DC] et distinct de D et de C : d'après la propriété « si un point d'un cercle est distinct des extrémités d'un diamètre, alors il forme avec elles un triangle rectangle en ce point », le triangle DMC est rectangle en M, donc $(MD) \perp (MC)$.
De même, M est sur le cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre [AC], donc le triangle AMC est rectangle en M et $(MA) \perp (MC)$.
Les droites (MD) et (MA) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (MC) et passent toutes deux par M : elles sont donc confondues. **Les points D, A et M sont alignés.** (M est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ACD.)

> 💡 **Astuce.** Dès qu'un énoncé fait intervenir un cercle circonscrit à un triangle rectangle, pense au diamètre : l'hypoténuse est un diamètre, et tout point du cercle « voit » ce diamètre sous un angle droit.

Exercice 2

1. Pour dessiner un pavé droit en perspective cavalière : on trace la face avant en vraie grandeur (un rectangle) ; les arêtes « fuyantes » (en profondeur) sont tracées parallèles entre elles, inclinées (par exemple à $45°$) et réduites (par exemple de moitié) ; on trace ensuite la face arrière, rectangle superposable à la face avant ; les arêtes cachées sont dessinées en pointillés. Un pavé droit a 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces, dont 3 arêtes cachées sur le dessin.

2. a) Volume d'un pavé droit : longueur $\times$ largeur $\times$ hauteur. $V = 40 \times 20 \times 30 = 24\,000$. **Le volume est 24 000 cm³.**

2. b) $24\,000 \div 1\,000 = 24$. **L'aquarium peut contenir 24 litres d'eau.**

3. Une boule de diamètre 30 cm a pour rayon 15 cm, et le volume d'une boule de rayon R est $\dfrac{4}{3}\pi R^3$. **La bonne formule est $\dfrac{4}{3} \times \pi \times 15^3$.** (La première utilise le diamètre au lieu du rayon ; $4\pi \times 15^2$ est l'aire de la sphère.)

4. Volume d'eau du second aquarium : $\dfrac{3}{4} \times \dfrac{4}{3} \times \pi \times 15^3 = \pi \times 15^3 = 3\,375\pi \approx 10\,602{,}9$ cm³.
Dans le premier aquarium, la base mesure $40 \times 20 = 800$ cm². Le volume d'eau vaut aire de la base $\times$ hauteur d'eau, donc $h = \dfrac{3\,375\pi}{800} \approx 13{,}25$ cm. Comme $13{,}25 < 30$, l'eau ne déborde pas. **L'eau monte à environ 13,3 cm (133 mm).**

> ⚠ **Piège.** Ne confonds pas rayon et diamètre : $15^3 = 3\,375$ alors que $30^3 = 27\,000$, soit un volume 8 fois trop grand.

Problème – Récupération d'eau de pluie : volumes, pourcentages et coût *(12 pts)*

Partie 1 - La capacité à recueillir de l'eau de pluie

1. a) C'est en 1999 qu'il y a eu le plus de précipitations (1 087 ℓ/m²).

1. b) En 2009, il est tombé 867 litres par mètre carré : $867 \times 5 = 4\,335$. **Il est tombé 4 335 litres d'eau sur 5 m².**

2. Somme des précipitations : $1\,087 + 990 + 868 + 850 + 690 + 616 + 512 + 873 + 810 + 841 + 867 = 9\,004$ ℓ/m².
Moyenne : $\dfrac{9\,004}{11} \approx 818{,}5$. **En moyenne, il est tombé environ 818,5 litres d'eau par mètre carré et par an.**

3. La surface au sol est un rectangle de 13,9 m sur 10 m : $13{,}9 \times 10 = 139$. **La surface au sol est 139 m².** (La hauteur de 6 m n'intervient pas.)

4. $V = P \times S \times 0{,}9 = 867 \times 139 \times 0{,}9 = 120\,513 \times 0{,}9 = 108\,461{,}7$. **En 2009, la famille aurait pu récupérer 108 461,7 litres.**
Or 1 m³ = 1 000 L, donc $V = 108{,}461\,7$ m³, et $108 \leqslant 108{,}461\,7 < 108{,}5$: **108 m³ en est bien une valeur approchée à 1 m³ près.**

Partie II - Les besoins en eau

1. $\dfrac{41}{115} \times 100 \approx 35{,}7$. **L'eau des WC représente environ 35,7 % de la consommation journalière d'une personne.**

2. Consommation de la famille en un an : $4 \times 115 \times 365 = 167\,900$ litres. La part remplaçable par l'eau de pluie est de 60 % : $0{,}6 \times 167\,900 = 100\,740$ litres, soit 100,74 m³. **Les besoins en eau de pluie de la famille sont bien d'environ 100 m³ par an.**

3. En 2009, la famille aurait récupéré environ 108 m³, et ses besoins sont d'environ 100,74 m³. Comme $108 > 100{,}74$, **l'eau de pluie récupérée en 2009 aurait suffi** (sur l'ensemble de l'année, à condition que la citerne soit assez grande pour stocker l'eau entre deux pluies).

Partie III - Le coût de l'eau

1. a) On part de 100 sur l'axe des abscisses, on monte jusqu'à la droite puis on lit l'ordonnée. **100 m³ d'eau coûtent environ 250 €.**

1. b) La représentation graphique est une **droite qui passe par l'origine** : le prix est proportionnel à la quantité d'eau, donc p est une fonction linéaire, de la forme $p(x) = ax$. Le point de coordonnées (100 ; 250) est sur la droite, donc $a = \dfrac{250}{100} = 2{,}5$ (vérification avec un autre point lu : (40 ; 100), et $\dfrac{100}{40} = 2{,}5$). $p(x) = 2{,}5x$: le mètre cube d'eau coûte 2,50 €.

1. c) Abonnement inclus, le prix est $p(x) + 50 = 2{,}5x + 50$: c'est une fonction affine. On trace sur l'annexe la **droite parallèle** à la première, décalée de 50 € vers le haut, qui passe par exemple par les points (0 ; 50), (100 ; 300) et (140 ; 400).

2. On cherche le plus petit nombre entier d'années n tel que $250n \geqslant 910$. Or $\dfrac{910}{250} = 3{,}64$: au bout de 3 ans, l'économie n'est que de $3 \times 250 = 750$ € (moins que 910 €), et au bout de 4 ans elle atteint $4 \times 250 = 1\,000$ €. **Les économies compenseront l'achat de la citerne au bout de 4 ans.**

Conseils pour le jour J

Le sujet comporte de nombreuses questions « Toutes les réponses doivent être justifiées » : même pour une lecture de diagramme ou un vrai/faux, écris la phrase qui justifie (calcul de fréquence, contre-exemple, identité remarquable). Pour les vrai/faux, un seul contre-exemple suffit à prouver qu'une affirmation est fausse : choisis des nombres simples (a = 1, un prix de 100 €).

L'exercice des bijoux demande d'abord de bien compter les triangles gris et blancs sur la figure : une erreur de comptage fausse tout. Laisse une trace de ta recherche même si tu ne trouves pas les prix. En géométrie, la question 5 est la plus difficile : elle repose sur le cercle de diamètre [DC] et le cercle de diamètre [AC] ; si tu bloques, passe à l'aquarium, qui rapporte des points faciles.

Dans le problème, les conversions sont essentielles : 1 m³ = 1 000 L. Aux questions « Montrer que… », la valeur à atteindre est donnée : écris tout le calcul puis compare explicitement ton résultat à la valeur annoncée.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).