Corrigé – Brevet 2011 – mathématiques – Centres étrangers

Calcul littéral, racines carrées et Ariane 5, Réciproque de Pythagore, volumes et Thalès, Bibliothèque d'école : table, tarifs, statistiques et probabilités

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Activités numériques – Calcul littéral, racines carrées et Ariane 5 *(12 pts)*

Exercice 1

1. On développe chaque terme, avec l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ puis la double distributivité :
$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$;
$(x-3)(1-2x) = x - 2x^2 - 3 + 6x = -2x^2 + 7x - 3$.
Donc $A = x^2 - 6x + 9 - 2x^2 + 7x - 3$. $A = -x^2 + x + 6$**.**

2. Le facteur $(x-3)$ est commun aux deux termes :
$A = (x-3)(x-3) + (x-3)(1-2x) = (x-3)\big[(x-3) + (1-2x)\big] = (x-3)(x-3+1-2x)$.
$A = (x-3)(-x-2)$, ce qu'il fallait prouver. (Contrôle : $(x-3)(-x-2) = -x^2 - 2x + 3x + 6 = -x^2 + x + 6$, on retrouve le développement de la question 1.)

3. $A = 0$ équivaut à $(x-3)(-x-2) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul :
$x - 3 = 0$, soit $x = 3$; ou $-x - 2 = 0$, soit $x = -2$.
L'équation a deux solutions : 3 et -2.

> **Astuce.** Pour résoudre $A = 0$, utilise toujours la forme **factorisée** (équation produit nul) : avec la forme développée $-x^2 + x + 6 = 0$, on ne sait pas conclure en 3e.

Exercice 2

1. a) On décompose chaque radicande pour faire apparaître un carré parfait :
$\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$;
$5\sqrt{12} = 5\sqrt{4 \times 3} = 5 \times 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$;
$\sqrt{300} = \sqrt{100 \times 3} = 10\sqrt{3}$.
Donc $B = 3\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 10\sqrt{3}$. $B = 3\sqrt{3}$ **: Sophie a raison.**

1. b) La calculatrice ne donne que des **valeurs approchées** (ici 10 chiffres). Obtenir deux fois le même affichage montre que les deux nombres sont très proches, mais ne prouve pas qu'ils sont égaux : deux nombres différents peuvent avoir le même affichage. **Le raisonnement d'Éric n'est pas une preuve** ; seule la démonstration de la question 1. a) permet d'affirmer l'égalité.

2. Le trait de fraction joue le rôle de parenthèses : on calcule d'abord tout le numérateur, en effectuant la multiplication avant la soustraction.
$C = \dfrac{10 - 9 \times 2}{2} = \dfrac{10 - 18}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4$.
C'est Éric qui a raison : $C = -4$**.** Sophie a sans doute divisé seulement 9×2 par 2, en calculant $10 - \dfrac{9 \times 2}{2} = 10 - 9 = 1$.

Exercice 3

1. 70 km = 70 000 m. La vitesse moyenne est $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{70\,000}{132} \approx 530{,}3$ m/s.
Pour convertir en km/h, on multiplie par 3 600 (secondes dans une heure) puis on divise par 1 000 (mètres dans un kilomètre), c'est-à-dire qu'on multiplie par 3,6 : $\dfrac{70\,000}{132} \times 3{,}6 \approx 1\,909{,}1$ km/h.
La vitesse moyenne est d'environ 530 m/s, soit environ 1 909 km/h.

2. a) $r + h = 6{,}4 \times 10^6 + 1{,}9 \times 10^6 = (6{,}4 + 1{,}9) \times 10^6$. $r + h = 8{,}3 \times 10^6$ **m.**

2. b) $v = \sqrt{\dfrac{13{,}4 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{8{,}3 \times 10^6}} = \sqrt{\dfrac{80{,}4 \times 10^{13}}{8{,}3 \times 10^6}} \approx \sqrt{96\,867\,470} \approx 9\,842{,}13$ m/s.
La vitesse doit être d'environ 9 842 m/s, soit $9{,}842 \times 10^3$ **m/s en notation scientifique.**

> ⚠ **Piège.** À la calculatrice, mets tout le quotient sous la racine avec des parenthèses et tape 10^{-11} avec la touche puissance (ou « $\times 10^{x}$ ») ; une parenthèse oubliée autour de $r + h$ donne un résultat faux.

Activités géométriques – Réciproque de Pythagore, volumes et Thalès *(12 pts)*

Exercice 1

On travaille en centimètres : OA = 60 cm, OB = 80 cm et AB = 1 m = 100 cm.
D'une part, $AB^2 = 100^2 = 10\,000$. D'autre part, $OA^2 + OB^2 = 60^2 + 80^2 = 3\,600 + 6\,400 = 10\,000$.
On constate que $AB^2 = OA^2 + OB^2$ donc, d'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle OAB est rectangle en O. **Les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires : les deux murs sont bien perpendiculaires.**

> ⚠ **Piège.** Convertis d'abord toutes les longueurs dans la même unité : AB = 1 m = 100 cm.

Exercice 2

1. D'après la figure, la boule a un diamètre de 6 cm, donc un rayon $R = 3$ cm.
$V_{\text{boule}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \times 3^3 = \dfrac{4 \times 27}{3}\pi = 36\pi$. **Le volume de la boule est** 36π **cm³** (environ 113,1 cm³).

2. Le cône a une hauteur $h = 12$ cm et sa base a un diamètre de 5,4 cm, donc un rayon $R = 2{,}7$ cm.
$V_{\text{cône}} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \times 2{,}7^2 \times 12 = \dfrac{1}{3}\pi \times 7{,}29 \times 12 = 29{,}16\pi$. **Le volume du cône est** $29{,}16\pi$ **cm³** (environ 91,6 cm³).

3. $36\pi > 29{,}16\pi$: la boule contient plus de glace que le cône rempli à ras bord. **Michel a donc intérêt à garder la boule posée sur le cône** : remplir le cône lui donnerait moins de glace (environ 21,5 cm³ de moins).

Exercice 3

1. a) D'après la figure : PM = 4,20 m, PC = 3,78 m et MW = 3,40 m ; C est sur [PM] et T sur [PW].
Les points P, C, M sont alignés, les points P, T, W sont alignés et les droites (CT) et (MW) sont parallèles, donc d'après le **théorème de Thalès** : $\dfrac{PC}{PM} = \dfrac{PT}{PW} = \dfrac{CT}{MW}$.
Donc $\dfrac{3{,}78}{4{,}20} = \dfrac{CT}{3{,}40}$, d'où $CT = \dfrac{3{,}78 \times 3{,}40}{4{,}20} = 0{,}9 \times 3{,}40 = 3{,}06$. **La couture mesurera 3,06 m.**

1. b) Il faut $2 \times 3{,}06 = 6{,}12$ m de fil. Comme $6{,}12 < 7$, **7 mètres de fil suffiront.**

2. On compare les quotients : $\dfrac{PC}{PM} = \dfrac{3{,}78}{4{,}20} = 0{,}9$ et $\dfrac{PT}{PW} = \dfrac{1{,}88}{2{,}30} \approx 0{,}817$.
Ces quotients ne sont pas égaux. Or, si (CT) était parallèle à (MW), le théorème de Thalès imposerait $\dfrac{PC}{PM} =$

$\frac{PT}{PW}$. **La couture n'est donc pas parallèle à (MW).**

> 💡 **Astuce.** Pour comparer deux quotients sans arrondi, fais les produits en croix : $3{,}78 \times 2{,}30 = 8{,}694$ et $4{,}20 \times 1{,}88 = 7{,}896$ sont différents, donc les quotients aussi.

Problème – Bibliothèque d'école : table, tarifs, statistiques et probabilités *(12 pts)*

Partie 1 : Installation d'un ordinateur dans une bibliothèque d'école

1. Si on déplace les étagères de 1 m, alors CF = CG = 1 m. Le triangle GCF est rectangle en C, donc d'après le **théorème de Pythagore** : $GF^2 = CG^2 + CF^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, d'où $GF = \sqrt{2}$. **GF $= \sqrt{2}$ m, soit environ 1,41 m.**

2. Notons d la distance du déplacement (en m) : $CF = CG = d$. Toujours d'après le théorème de Pythagore dans le triangle GCF rectangle en C : $GF^2 = d^2 + d^2 = 2d^2$.
On veut $GF = 1$, donc $2d^2 = 1$, soit $d^2 = \frac{1}{2} = 0{,}5$ et, comme d est positif, $d = \sqrt{0{,}5} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$.
Il faut déplacer chaque étagère d'environ 0,71 m (71 cm). (Vérification : $0{,}707^2 + 0{,}707^2 \approx 1$.)

Partie 2 : Achat d'un logiciel de gestion de bibliothèque

1. Le débit est la quantité de données transférée par seconde : $\frac{3{,}5}{7} = 0{,}5$. **Le débit est de 0,5 Mo/s.**

2. Tarif B : $0{,}10\times$ nombre d'élèves ; tarif C : $8 + 0{,}05\times$ nombre d'élèves.

Nombre d'élèves	**100**	**200**	**300**
Tarif A	19,00 €	**19,00 €**	**19,00 €**
Tarif B	**10,00 €**	**20,00 €**	30,00 €
Tarif C	**13,00 €**	18,00 €	**23,00 €**

3. a) 5 centimes = 0,05 €, donc le tarif C pour x élèves vaut $8 + 0{,}05x$ euros. **C'est la fonction $x \longmapsto 8 + 0{,}05x$.**

3. b) Elle est de la forme $x \longmapsto ax + b$ avec $a = 0{,}05$ et $b = 8$: **c'est une fonction affine.**

> ⚠ **Piège.** Les prix sont en euros : 5 centimes s'écrivent 0,05 et non 5. La fonction $x \longmapsto 8 + 5x$ donnerait 508 € pour 100 élèves !

4. Tarif A : il ne dépend pas du nombre d'élèves, sa représentation est la **droite horizontale** d'équation $y = 19$ (parallèle à l'axe des abscisses, passant par le point de coordonnées (0 ; 19)).
Tarif C : fonction affine, sa représentation est une **droite** ; on place deux points du tableau, par exemple (100 ; 13) et (300 ; 23), qu'on relie (elle passe aussi par (0 ; 8) et (200 ; 18)).

5. Le tarif A est plus intéressant que le tarif C lorsque la droite du tarif A est **en dessous** de celle du tarif C. Les deux droites se coupent au point d'abscisse 220 (ordonnée 19) : on trace les pointillés de ce point vers l'axe des abscisses. **Le tarif A est plus intéressant que le tarif C à partir de 220 élèves** (strictement au-delà de 220 ; pour 220 élèves, les deux tarifs coûtent 19 €). Contrôle : $8 + 0{,}05x = 19$ donne $0{,}05x = 11$, soit $x = 220$.

6. Pour 209 élèves : tarif A : 19 € ; tarif B : $0{,}10 \times 209 = 20{,}90$ € ; tarif C : $8 + 0{,}05 \times 209 = 8 + 10{,}45 = 18{,}45$ €. **Le tarif C est le plus intéressant pour l'école (18,45 €).**

Partie 3 : Fonctionnement de la bibliothèque

1. L'effectif total est $39 + 30 + 36 + 23 + 20 + 22 + 18 + 10 + 11 = 209$ élèves. Le nombre total d'emprunts est :
$0 \times 39 + 1 \times 30 + 2 \times 36 + 3 \times 23 + 4 \times 20 + 5 \times 22 + 6 \times 18 + 7 \times 10 + 8 \times 11$
$= 0 + 30 + 72 + 69 + 80 + 110 + 108 + 70 + 88 = 627$.
Moyenne : $\dfrac{627}{209} = 3$. **Le nombre moyen d'emprunts est de 3 par élève.**

2. L'effectif total 209 est impair et $209 = 2 \times 104 + 1$: la médiane est la $\mathbf{105^{e}}$ valeur de la série rangée dans l'ordre croissant. Effectifs cumulés croissants : 39 élèves ont emprunté 0 livre, $39 + 30 = 69$ au plus 1 livre, $69 + 36 = 105$ au plus 2 livres. La 105^{e} valeur est donc 2. **La médiane de la série est 2 emprunts.**

Partie 4 : Fête de fin d'année

1. Le colis contient 5 livres, tous ayant la même chance d'être tirés, dont 3 bandes dessinées. **La probabilité de tirer une bande dessinée est** $\dfrac{3}{5}$ (soit 0,6).

2. Après le premier tirage d'un album, il reste 4 livres : 3 bandes dessinées et 1 album. **La probabilité de tirer une bande dessinée est alors** $\dfrac{3}{4}$ (soit 0,75).

Conseils pour le jour J

Ce sujet comporte beaucoup de questions courtes : avance régulièrement et garde au moins 45 minutes pour le problème, qui est long (quatre parties indépendantes). Si tu bloques sur la partie 1 du problème, passe directement aux tarifs, aux statistiques et aux probabilités, qui rapportent des points faciles.

Attention aux pièges de calcul : la priorité de la multiplication et le rôle du trait de fraction dans C, la conversion 1 m = 100 cm chez le maçon, le rayon (et non le diamètre) dans les formules de volume, les 5 centimes à écrire 0,05 €. Pour la vitesse de libération, écris le calcul complet avant de donner le résultat de la calculatrice, puis l'arrondi à l'unité et l'écriture scientifique demandés.

Dans les questions de géométrie, la rédaction compte : alignement des points, parallélisme, puis le nom du théorème (Pythagore, sa réciproque, Thalès). Pour montrer que la couture n'est pas parallèle, il suffit de prouver que deux quotients sont différents.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).