Corrigé – Brevet 2011 – mathématiques – BrevetAmeriqueNord7juin2011

Entiers consécutifs, vitesse de la lumière et QCM, Solide de cubes, Pythagore, trigonométrie et Thalès, Prix des places et recette d'un théâtre

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Activités numériques – Entiers consécutifs, vitesse de la lumière et QCM *(12 pts)*

Exercice 1

1. a) Calcul de Leslie : $11 \times (2 \times 9) = 11 \times 18 = 198$. Calcul de Jonathan : $10^2 + 2 = 100 + 2 = 102$. **Leslie obtient 198 et Jonathan obtient 102.**

1. b) Leslie multiplie le troisième nombre (11) par le double du premier (9) ; Jonathan élève au carré le deuxième nombre (10). Les nombres 9, 10 et 11 sont bien trois entiers consécutifs rangés dans l'ordre croissant. **Le professeur a choisi 9, 10 et 11.**

2. a) Si le deuxième nombre est 6, les trois entiers sont 5, 6 et 7. Leslie obtient $7 \times (2 \times 5) = 7 \times 10 = 70$ et Jonathan obtient $6^2 + 2 = 36 + 2 = 38$. Comme $70 \neq 38$, **le professeur n'a pas choisi 6 comme deuxième nombre.**

2. b) Si le deuxième nombre est -7, les trois entiers sont -8, -7 et -6. Leslie obtient $(-6) \times (2 \times (-8)) = (-6) \times (-16) = 96$ et Jonathan obtient $(-7)^2 + 2 = 49 + 2 = 51$. Comme $96 \neq 51$, **le professeur n'a pas choisi -7 comme deuxième nombre.**

2. c) Si le deuxième nombre est n, le premier est $n - 1$ et le troisième est $n + 1$.
Leslie calcule : $(n + 1) \times 2(n - 1) = 2(n + 1)(n - 1) = 2(n^2 - 1) = 2n^2 - 2$ (identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$).
Jonathan calcule : $n^2 + 2$.
Les deux résultats sont égaux lorsque $2n^2 - 2 = n^2 + 2$, c'est-à-dire $2n^2 - n^2 = 2 + 2$, soit $n^2 = 4$. **Arthur a donc raison.**
L'équation $n^2 = 4$ a deux solutions : $n = 2$ et $n = -2$.
• Si $n = 2$, les entiers sont 1, 2 et 3 (vérification : $3 \times (2 \times 1) = 6$ et $2^2 + 2 = 6$).
• Si $n = -2$, les entiers sont -3, -2 et -1 (vérification : $(-1) \times (2 \times (-3)) = 6$ et $(-2)^2 + 2 = 6$).
Le professeur a choisi 1, 2 et 3, ou bien -3, -2 et -1.

> ⚠ **Piège.** L'équation $n^2 = 4$ a **deux** solutions, 2 et -2 : l'énoncé parle d'entiers relatifs, n'oublie pas la solution négative.

Exercice 2

1. La distance parcourue est égale à la vitesse multipliée par la durée : $d = v \times t = 300\,000 \times \dfrac{1}{75} = \dfrac{300\,000}{75} = 4\,000$. **Le satellite est à 4 000 km de la Terre.**

2. On convertit la durée en secondes : 8 min 30 s $= 8 \times 60 + 30 = 510$ s. Alors $d = 300\,000 \times 510 = 153\,000\,000$ km. En écriture scientifique : **la distance Terre-Soleil vaut environ $1{,}53 \times 10^8$ km.**

Exercice 3

1. On reconnaît une différence de deux carrés : $(x + 1)^2 - 9 = (x + 1)^2 - 3^2 = (x + 1 - 3)(x + 1 + 3) = (x - 2)(x + 4)$. **Réponse A.**

2. D'après la règle du produit de deux puissances d'un même nombre : $5^n \times 5^m = 5^{n+m}$. **Réponse B.**

3. La division est prioritaire sur la soustraction : $\frac{4}{3} \div \frac{5}{2} = \frac{4}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$, puis $\frac{7}{3} - \frac{8}{15} = \frac{35}{15} - \frac{8}{15} = \frac{27}{15}$.
Réponse C. (La réponse B est fausse car on multiplie par l'inverse du **diviseur** $\frac{5}{2}$, et non par l'inverse de $\frac{4}{3}$.)

4. 774 et 338 sont tous deux pairs (diviseur commun 2) ; 1 035 et 774 sont tous deux divisibles par 9 (sommes des chiffres 9 et 18). En revanche $63 = 3^2 \times 7$ et $44 = 2^2 \times 11$ n'ont aucun facteur premier commun : leur seul diviseur commun est 1. **Réponse B : 63 et 44.**

5. Un nombre est en écriture scientifique s'il s'écrit $a \times 10^n$ avec $1 \leqslant a < 10$. Pour 17,3, $a \geqslant 10$; pour 0,97, $a < 1$. **Réponse C :** $1{,}52 \times 10^3$**.**

Activités géométriques – Solide de cubes, Pythagore, trigonométrie et Thalès *(12 pts)*

Exercice 1

D'après le dessin, le solide est formé ainsi (de gauche à droite en le regardant de face) : une colonne de 2 cubes empilés, puis 2 cubes posés au sol dans le prolongement de la face avant, puis, au bout, un cube au sol surmonté du prisme et, devant lui, un dernier cube au sol (qui dépasse vers l'avant). Cela fait bien 6 cubes.

1. Vue de l'arrière, en vraie grandeur (l'observateur placé derrière le solide voit la gauche et la droite inversées). La vue est formée, posée sur une même ligne de sol, de gauche à droite :
• un carré de 4 cm de côté (le cube situé sous le prisme ; le cube de devant est caché derrière lui), surmonté d'un rectangle de 4 cm de large et de 2 cm de haut (le prisme, vu de dos) ;
• un carré de 4 cm de côté ;
• un carré de 4 cm de côté ;
• deux carrés de 4 cm de côté empilés (la colonne de 2 cubes), soit 8 cm de haut.
La vue de l'arrière mesure donc 16 cm de large ; sa hauteur est de 6 cm à gauche, 4 cm au milieu et 8 cm à droite.

2. Volume d'un cube : $4^3 = 64$ cm³, donc pour les 6 cubes : $6 \times 64 = 384$ cm³.
Le prisme a pour base un triangle rectangle isocèle de côtés de l'angle droit 4 cm (voir 3. a) et pour hauteur $4 \div 2 = 2$ cm. Son volume est : $V =$ aire de la base $\times$ hauteur $= \frac{4 \times 4}{2} \times 2 = 8 \times 2 = 16$ cm³.
Volume total : $384 + 16 = 400$. **Le volume du solide est 400 cm³.**

3. a) Le prisme est posé sur la face du dessus d'un cube, qui est un carré de 4 cm de côté. Sa base ABC a pour côtés [AB] et [BC] deux côtés consécutifs de ce carré, et pour troisième côté [AC] une diagonale du carré. On a donc AB = BC = 4 cm et $\widehat{ABC} = 90°$ (angle d'un carré). **La base ABC est un triangle rectangle isocèle en B** (c'est la moitié du carré).

3. b) Le triangle ABC est rectangle en B, donc d'après le **théorème de Pythagore** : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$.
Donc $AC = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$. **On a bien AC $= 4\sqrt{2}$ cm.**

3. c) La face ACFD d'un prisme droit est un rectangle de longueur AC $= 4\sqrt{2}$ cm et de largeur AD = 2 cm (la hauteur du prisme). Son aire vaut $AC \times AD = 4\sqrt{2} \times 2 = 8\sqrt{2}$ cm². Or $8\sqrt{2} \approx 11{,}3137$ cm², c'est-à-dire environ 1 131,37 mm². **Aire de ACFD $= 8\sqrt{2}$ cm², soit environ 1 131 mm² (11,31 cm²).**

> 💡 **Astuce.** 1 cm² = 100 mm² : arrondir au mm² près revient à garder deux chiffres après la virgule quand l'aire est écrite en cm².

Exercice 2

1. Le triangle ABC est rectangle en C (codage), donc d'après le **théorème de Pythagore** : $AB^2 = AC^2 + BC^2$, d'où $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 30^2 - 25^2 = 900 - 625 = 275$.
Donc $BC = \sqrt{275} = \sqrt{25 \times 11} = 5\sqrt{11}$. **$BC = 5\sqrt{11}$ cm** (environ 16,58 cm).

2. Le triangle ACD est rectangle en C. Par rapport à l'angle $\widehat{CAD} = 49°$, [CD] est le côté opposé et [AC] le côté adjacent, donc par la **tangente** : $\tan 49° = \dfrac{CD}{AC}$, d'où $CD = 25 \times \tan 49° \approx 28{,}759$ cm.
Comme B, C et D sont alignés, avec C entre B et D : $BD = BC + CD = 5\sqrt{11} + 25\tan 49° \approx 16{,}583 + 28{,}759 \approx 45{,}342$ cm. **BD ≈ 45,3 cm au millimètre près.**

> ⚠ **Piège.** Ne pas arrondir BC et CD trop tôt, et vérifier que la calculatrice est en **degrés** : $\tan 49° \approx 1{,}150$.

Exercice 3

Les points O, A, R d'une part et K, S, R d'autre part sont alignés, et les droites (SA) et (OK) sont parallèles : on est dans une configuration de Thalès dans les triangles RAS et ROK.

1. Question : « Calculer la longueur AR. »
Réponse : A appartient au segment [OR], donc $AR = OR - OA = 6{,}84 - 3{,}8 = 3{,}04$. **AR = 3,04 cm.**

2. Question : « Calculer la longueur OK. »
Réponse : les points R, A, O sont alignés, les points R, S, K sont alignés et les droites (AS) et (OK) sont parallèles, donc d'après le **théorème de Thalès** : $\dfrac{RA}{RO} = \dfrac{RS}{RK} = \dfrac{AS}{OK}$.
Avec $\dfrac{RA}{RO} = \dfrac{AS}{OK} : \dfrac{3{,}04}{6{,}84} = \dfrac{5}{OK}$, d'où $OK = \dfrac{5 \times 6{,}84}{3{,}04} = \dfrac{34{,}2}{3{,}04} = 11{,}25$. **OK = 11,25 cm.**

3. Question : « Calculer le périmètre du triangle ORK. »
Réponse : $\mathcal{P} = KR + OR + OK = 7{,}2 + 6{,}84 + 11{,}25 = 25{,}29$. **Le périmètre du triangle ORK est 25,29 cm.**

Problème – Prix des places et recette d'un théâtre *(12 pts)*

Partie 1

1. Chaque euro de réduction fait baisser le prix de 1 € et ajoute 50 spectateurs.

Réduction en €	Prix de la place en €	Nombre de spectateurs	Recette du spectacle
0	20	500	$20 \times 500 = 10\,000$
1	19	**550**	**$19 \times 550 = 10\,450$**
2	**18**	600	**$18 \times 600 = 10\,800$**
4	16	**700**	**$16 \times 700 = 11\,200$**

(600 spectateurs, c'est 100 de plus que 500, soit $100 \div 50 = 2$ € de réduction ; un prix de 16 €, c'est 4 € de réduction, donc $500 + 4 \times 50 = 700$ spectateurs.)

2. Pour une réduction de x € :

Réduction en €	Prix de la place en €	Nombre de spectateurs	Recette du spectacle
x	$20 - x$	$500 + 50x$	$(20 - x)(500 + 50x)$

3. On développe par double distributivité : $(20 - x)(500 + 50x) = 20 \times 500 + 20 \times 50x - x \times 500 - x \times 50x = 10\,000 + 1\,000x - 500x - 50x^2$.

La recette vaut $-50x^2 + 500x + 10\,000$. (Vérification avec $x = 4$: $-800 + 2\,000 + 10\,000 = 11\,200$, comme dans le tableau 1.)

Partie 2

1. On part de l'abscisse 2 sur l'axe horizontal, on monte jusqu'à la courbe puis on lit l'ordonnée : **pour une réduction de 2 €, la recette est d'environ 10 800 €** (ce qui confirme le tableau 1).

2. On part de 4 050 sur l'axe des ordonnées, on va horizontalement jusqu'à la courbe (partie descendante) puis on descend sur l'axe des abscisses : on lit $x \approx 17$. **La réduction est d'environ 17 €, la place coûte alors $20 - 17 = 3$ €.** (Vérification : $3 \times (500 + 50 \times 17) = 3 \times 1\,350 = 4\,050$.)

3. On lit $R(8) \approx 10\,800$. **L'image de 8 par la fonction R est environ 10 800.** Interprétation : avec une réduction de 8 € (place à 12 €, 900 spectateurs), la recette est de 10 800 €, c'est-à-dire la même qu'avec une réduction de 2 € (place à 18 €).

4. Le point le plus haut de la courbe a pour abscisse 5 et pour ordonnée environ 11 250. **La recette maximale est d'environ 11 250 €, obtenue pour une réduction de 5 €, soit une place à 15 €.** (Vérification : $15 \times (500 + 5 \times 50) = 15 \times 750 = 11\,250$.)

> **Astuce.** Dans une lecture graphique, trace toujours les pointillés sur l'annexe : ils sont demandés et rapportent des points. Contrôle ensuite ta lecture avec la formule de la partie 1.

Partie 3

D'après la figure, la largeur totale de la salle au niveau de l'allée horizontale est $13 + 2 + 13 = 28$ m, l'allée centrale mesure 2 m de large et les deux morceaux du bord de la scène situés de part et d'autre de l'allée sont égaux (codage).

Les deux trapèzes. Chaque trapèze a pour petite base $\dfrac{16 - 2}{2} = 7$ m (le long de la scène), pour grande base 13 m (le long de l'allée horizontale) et pour hauteur 10 m. Aire d'un trapèze : $\dfrac{(B + b) \times h}{2} = \dfrac{(13 + 7) \times 10}{2} = 100$ m². Pour les deux : 200 m².

Les deux quarts de disque. Chacun a pour rayon 13 m. Deux quarts de disque forment un demi-disque : $\dfrac{\pi \times 13^2}{2} = \dfrac{169\pi}{2} \approx 265{,}46$ m².

Zone des sièges. $200 + \dfrac{169\pi}{2} \approx 465{,}46$ m². Avec 1,8 siège par m² : $1{,}8 \times 465{,}46 \approx 837{,}8$.

On ne peut pas installer une fraction de siège : **le théâtre compte environ 837 places.**

Conseils pour le jour J

Ce sujet est long et varié : garde environ 30 minutes pour chaque grande partie et 30 minutes pour le problème. Les points faciles sont nombreux (calculs de Leslie et Jonathan, QCM, volume, tableau 1, lectures graphiques) : sécurise-les d'abord. À l'exercice 1 des activités numériques, la question 2. c) demande d'expliquer d'où vient l'équation $n^2 = 4$: il faut écrire les trois nombres $n - 1$, n, $n + 1$, développer, et ne pas oublier la solution négative.

En géométrie, prends le temps de bien lire le dessin du solide avant de faire la vue de l'arrière : la gauche et la droite sont inversées et le cube de devant est caché. À l'exercice 3, il faut écrire de vraies questions (« Calculer AR », « Calculer OK », « Calculer le périmètre de ORK ») puis rédiger les réponses avec le nom du théorème de Thalès. Dans la partie 3 du problème, toute trace de recherche compte : décompose la salle en figures simples (trapèzes et quarts de disque), écris les formules d'aire et conclus par un nombre entier de places.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).