Corrigé – Brevet 2011 – mathématiques – Asie

QCM : PGCD, pourcentage, puissances, équation, Probabilités avec deux jeux de cartes, Programme de calcul et calcul littéral, Le grenier : trigonométrie, Triangle isocèle, triangle équilatéral et Pythagore, Réciproque de Thalès et périmètre, Tension, intensité et puissance : fonction linéaire et lecture graphique

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Activités numériques – Exercice 1 – QCM : PGCD, pourcentage, puissances, équation

1. Réponse C : 34. Algorithme d'Euclide : $238 = 170 \times 1 + 68$; $170 = 68 \times 2 + 34$; $68 = 34 \times 2 + 0$. Le dernier reste non nul est 34 (vérification : $170 = 34 \times 5$ et $238 = 34 \times 7$, avec 5 et 7 premiers entre eux).

2. Réponse A : 0,95. Diminuer une quantité de 5 %, c'est la multiplier par $1 - \dfrac{5}{100} = 0{,}95$.

3. Réponse A : 0. $3^{-2} \times 3^3 - 3 = 3^{-2+3} - 3 = 3^1 - 3 = 3 - 3 = 0$.

4. Réponse C : -2 et 2. $x^2 - 4 = 0$ s'écrit $(x-2)(x+2) = 0$; un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $x = 2$ ou $x = -2$.

> ⚠ **Piège.** En question 3, ne confonds pas 3^0 (qui vaut 1) et $0 : 3^{-2} \times 3^3$ vaut $3^1 = 3$, et $3 - 3 = 0$, pas 3^0.

Activités numériques – Exercice 2 – Probabilités avec deux jeux de cartes

Dans chaque jeu, les cartes sont tirées au hasard : on est dans une situation d'équiprobabilité.

1. Le jeu de 32 cartes ne contient pas de 5 (il commence au 7) : pour le joueur A, l'événement est impossible, $p_A = 0$. Le jeu de 52 cartes contient un seul 5 de Carreau : $p_B = \dfrac{1}{52}$.

2. Joueur A : 8 Cœurs sur 32 cartes, $p_A = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$. Joueur B : 13 Cœurs sur 52 cartes, $p_B = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$. **Oui, les deux joueurs ont la même probabilité $\dfrac{1}{4}$ de tirer un Cœur** (chaque couleur représente un quart du jeu).

3. Chaque jeu contient 4 Dames. Joueur A : $p_A = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$. Joueur B : $p_B = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13} \approx 0{,}077$.
Comme $\dfrac{1}{8} > \dfrac{1}{13}$, **c'est le joueur A qui a la plus grande probabilité de tirer une Dame.**

Activités numériques – Exercice 3 – Programme de calcul et calcul littéral

1. a. $10 + 1 = 11$; $11^2 = 121$; $121 - 10^2 = 121 - 100 = 21$; $21 - 1 = 20$. **On obtient bien 20.**

1. b. $-3 + 1 = -2$; $(-2)^2 = 4$; $4 - (-3)^2 = 4 - 9 = -5$; $-5 - 1 = -6$. **On obtient bien -6.**

1. c. $1{,}5 + 1 = 2{,}5$; $2{,}5^2 = 6{,}25$; $6{,}25 - 1{,}5^2 = 6{,}25 - 2{,}25 = 4$; $4 - 1 = 3$. **On obtient 3.**

2. Conjecture : 10 donne 20, -3 donne -6, 1,5 donne 3 : **le résultat semble toujours égal au double du nombre de départ.**
Démonstration : on note x le nombre de départ. Le programme donne :
$(x+1)^2 - x^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 1 = 2x$ (on a développé avec l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$).
Pour tout nombre x, le résultat est $2x$: **la conjecture est démontrée, le programme donne toujours le double du nombre choisi.**

> **Astuce.** Des exemples ne suffisent jamais à démontrer : seul le calcul avec une lettre x prouve que la propriété est vraie pour tous les nombres.

Activités géométriques – Exercice 1 – Le grenier : trigonométrie

1. Le triangle ABC est isocèle en A (toit symétrique) et I est le milieu de [BC], donc $BI = 7{,}2 \div 2 = 3{,}6$ m. Le triangle ABI est rectangle en I (codage de l'angle droit). Dans ce triangle, on connaît l'angle $\widehat{ABI} = 48°$ et le côté adjacent [BI] ; on cherche le côté opposé [AI] :
$\tan \widehat{ABI} = \dfrac{AI}{BI}$, donc $AI = 3{,}6 \times \tan 48° \approx 3{,}998$.
AI ≈ 3,99 m (valeur approchée par défaut au centimètre).

2. La poutre [KM] est horizontale et (AI) lui est perpendiculaire en J ; on lit KJ = 2 m sur le schéma. Les droites (KM) et (BC) sont toutes deux perpendiculaires à (AI), donc parallèles ; les angles $\widehat{AKJ}$ et $\widehat{ABI}$ sont correspondants, d'où $\widehat{AKJ} = 48°$. Dans le triangle AKJ rectangle en J :
$\tan \widehat{AKJ} = \dfrac{AJ}{KJ}$, donc $AJ = 2 \times \tan 48° \approx 2{,}221$.
AJ ≈ 2,23 m (valeur approchée par excès au centimètre).

3. La hauteur sous la poutre est $JI = AI - AJ$. Comme AI est au moins égal à 3,99 m et AJ au plus égal à 2,23 m : $JI \geqslant 3{,}99 - 2{,}23 = 1{,}76$ m. Or $1{,}76 > 1{,}75$. **Le propriétaire peut se tenir debout sous la poutre sans se cogner la tête** (de justesse : il reste au moins 1 cm).

> **Astuce.** Les arrondis « par défaut » pour AI et « par excès » pour AJ ne sont pas un hasard : ils garantissent que la hauteur réelle JI est au moins égale à 1,76 m. Un arrondi dans le mauvais sens pourrait fausser la conclusion.

Activités géométriques – Exercice 2 – Triangle isocèle, triangle équilatéral et Pythagore

1. Construction en vraie grandeur : on trace [AB] de 5 cm. En B, on trace au rapporteur une demi-droite faisant un angle de 75° avec [BA] ; on reporte au compas, depuis A, la longueur AC = AB = 5 cm sur cette demi-droite : on obtient C (le point autre que B ; on peut aussi tracer en A un angle de 30°, voir question 2). Puis on construit le triangle équilatéral ACE du côté opposé à B : E est l'intersection des arcs de cercle de rayon 5 cm de centres A et C.

2. a. Le triangle ABC est isocèle en A, donc ses angles à la base sont égaux : $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 75°$. La somme des angles d'un triangle vaut 180°, donc $\widehat{BAC} = 180° - 75° - 75° = 30°$. **$\widehat{BAC} = 30°$.**

2. b. Le triangle ACE est équilatéral, donc $\widehat{CAE} = 60°$ et $AE = AC$. Comme E et B sont de part et d'autre de (AC) : $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 30° + 60° = 90°$. De plus, $AB = AC = AE = 5$ cm. **Le triangle ABE est rectangle et isocèle en A.**

3. Le triangle ABE est rectangle en A ; d'après le **théorème de Pythagore** :
$BE^2 = AB^2 + AE^2 = 5^2 + 5^2 = 50$, donc $BE = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
$BE = 5\sqrt{2}$ cm ≈ 7,1 cm (arrondi au millimètre ; $5\sqrt{2} \approx 7{,}071$).

Activités géométriques – Exercice 3 – Réciproque de Thalès et périmètre

1. Les droites (TP) et (YG) sont sécantes en I : les points T, I, P sont alignés ainsi que les points Y, I, G, dans le même ordre (I est entre T et P, et entre Y et G).
$\dfrac{IT}{IP} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ et $\dfrac{IY}{IG} = \dfrac{1{,}4}{7} = 0{,}2$.

On a $\dfrac{IT}{IP} = \dfrac{IY}{IG}$, donc d'après la **réciproque du théorème de Thalès**, **les droites (PG) et (YT) sont parallèles.**

2. Les droites (YT) et (PG) étant parallèles, d'après le **théorème de Thalès** :
$\dfrac{IT}{IP} = \dfrac{IY}{IG} = \dfrac{YT}{PG}$, donc $\dfrac{0{,}8}{PG} = 0{,}2$ et $PG = \dfrac{0{,}8}{0{,}2} = 4$ cm.
Périmètre du triangle IGP : $IG + GP + PI = 7 + 4 + 5 = 16$. **Le périmètre du triangle IGP est 16 cm.**

Problème – Tension, intensité et puissance : fonction linéaire et lecture graphique *(12 pts)*

Partie A

1. a. On calcule le quotient $\dfrac{U}{I}$ pour chaque colonne :
$\dfrac{3}{0{,}02} = 150$; $\dfrac{4{,}5}{0{,}03} = 150$; $\dfrac{6}{0{,}04} = 150$; $\dfrac{12}{0{,}08} = 150$.
Tous les quotients sont égaux : **c'est un tableau de proportionnalité.**

1. b. Le coefficient de proportionnalité est 150 (c'est la valeur R de la résistance).

1. c. $U = 150 \times 0{,}07 = 10{,}5$. **Pour I = 0,07 A, la tension vaut 10,5 V.**

2. La tension est proportionnelle à l'intensité : f **est une fonction linéaire, et** $f(I) = 150 \times I$**.**

3. La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine. On trace la droite passant par O(0 ; 0) et par le point de coordonnées (0,08 ; 12) (on peut contrôler avec (0,04 ; 6) ou (0,02 ; 3), qui doivent être sur la droite).

4. On part de 10 sur l'axe des ordonnées, on rejoint horizontalement la droite, puis on descend verticalement sur l'axe des abscisses : on lit **I ≈ 0,067 A** (entre 0,06 et 0,07, plus près de 0,07).
Par le calcul : $150 \times I = 10$, donc $I = \dfrac{10}{150} = \dfrac{1}{15}$. **La valeur exacte est** $I = \dfrac{1}{15}$ **A** ($\approx 0{,}0667$ A).

Partie B

1. D'après la partie A, $U = 150 \times I$ (expression algébrique de f). Donc $P = U \times I = 150 \times I \times I = 150 \times I^2$. **On a bien** $P = 150 \times I^2$**.**

2. $g(7{,}5) = 150 \times 7{,}5^2 = 150 \times 56{,}25 = 8\,437{,}5$. **L'image de 7,5 par** g **est 8 437,5.**

3. On part de 5 sur l'axe des abscisses, on monte verticalement jusqu'à la courbe, puis on rejoint horizontalement l'axe des ordonnées : on lit **P ≈ 3 750 W** (entre 3 500 et 4 000). Le calcul le confirme : $150 \times 5^2 = 3\,750$.

4. On part de 2 500 sur l'axe des ordonnées, on rejoint horizontalement la courbe, puis on descend sur l'axe des abscisses : on lit **un antécédent d'environ 4,1**. (Contrôle : $150 \times 4{,}1^2 = 2\,521{,}5$, proche de 2 500 ; la valeur exacte est $\sqrt{\dfrac{2\,500}{150}} \approx 4{,}08$.)

5. Non, la puissance P n'est pas proportionnelle à l'intensité I. La représentation graphique de g est une courbe et non une droite passant par l'origine. Par exemple, $g(1) = 150$ et $g(2) = 600$: quand l'intensité double, la puissance est multipliée par 4. Le quotient $\dfrac{P}{I} = 150 \times I$ n'est pas constant.

> ⚠ **Piège.** En question B.1, l'énoncé renvoie à « la question 3 de la partie A », mais l'expression utile est celle de la question 2 : $f(I) = 150 \times I$, c'est-à-dire $U = 150 \times I$.

Conseils pour le jour J

Dans le QCM, aucune justification n'est demandée, mais fais les calculs au brouillon : en question 3, la réponse 3^0 est un piège classique pour qui calcule trop vite avec les puissances. Gagne du temps ici pour le reste du sujet.

Dans l'exercice du grenier, utilise ta calculatrice en mode degrés et respecte le sens des arrondis (par défaut pour AI, par excès pour AJ) : c'est ce qui permet de conclure avec certitude que la hauteur sous la poutre dépasse 1,75 m.

Sur les graphiques de l'annexe, laisse toujours apparents les traits de construction en pointillés : ils font partie de la réponse. Et vérifie chaque lecture par un calcul rapide quand c'est possible (par exemple $150 \times 5^2 = 3\,750$).

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).