Corrigé – Brevet 2010 – mathématiques – Métropole

Programme de calcul et volume de la glace, Octogone dans un carré et pyramide, Rénovation d'un local : peinture, dallage et devis

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Activités numériques – Programme de calcul et volume de la glace *(12 pts)*

Exercice 1

1. a) Avec 2 comme nombre de départ : $2 \times (-2) = -4$; $-4 + 5 = 1$; $1 \times 5 = 5$. **On obtient bien 5.**

1. b) Avec 3 : $3 \times (-2) = -6$; $-6 + 5 = -1$; $-1 \times 5 = -5$. **On obtient -5.**

2. Si l'on note x le nombre de départ, le programme donne $5(-2x + 5)$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul ; comme $5 \neq 0$, il faut $-2x + 5 = 0$, soit $-2x = -5$, donc $x = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$.
Vérification : $2{,}5 \times (-2) = -5$; $-5 + 5 = 0$; $0 \times 5 = 0$. **Il faut choisir 2,5 au départ.**

3. Le programme donne, pour un nombre de départ x : $5(-2x + 5) = -10x + 25$.
On développe l'expression d'Arthur avec l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:
$(x - 5)^2 - x^2 = x^2 - 10x + 25 - x^2 = -10x + 25$.
Les deux expressions sont égales pour tout nombre x. **Arthur a raison.** (Contrôle avec $x = 2$: $(2 - 5)^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$, ce qui correspond à la question 1. a.)

> 💡 **Astuce.** Pour prouver qu'une expression convient « pour n'importe quel nombre », un ou deux essais ne suffisent pas : il faut développer et réduire les deux expressions et montrer qu'elles sont identiques.

Exercice 2

1. a) On place 6 sur l'axe des abscisses, on monte jusqu'au segment puis on lit l'ordonnée. **6 litres d'eau liquide donnent environ 6,5 litres de glace.**

1. b) On place 10 sur l'axe des ordonnées, on va horizontalement jusqu'au segment puis on lit l'abscisse : elle se situe entre 9 et 9,5. **Il faut environ 9,25 litres d'eau liquide (un peu plus de 9 L) pour obtenir 10 litres de glace.**

2. La représentation graphique est une portion de droite qui passe par l'origine du repère. **Le volume de glace est donc proportionnel au volume d'eau liquide.**

3. Le volume passe de 10 L à 10,8 L : l'augmentation est de $10{,}8 - 10 = 0{,}8$ L. En pourcentage du volume de départ : $\dfrac{0{,}8}{10} \times 100 = 8$. **Le volume d'eau augmente de 8 % en gelant.** (Vérification : $10 \times 1{,}08 = 10{,}8$.)

Remarque : le coefficient de proportionnalité vaut donc 1,08, ce qui confirme les lectures de la question 1 : $6 \times 1{,}08 = 6{,}48 \approx 6{,}5$ L et $10 \div 1{,}08 \approx 9{,}26$ L.

Activités géométriques – Octogone dans un carré et pyramide *(12 pts)*

Exercice 1

1. Les codages montrent que chaque côté du carré est partagé en trois segments de même longueur : $9 \div 3 = 3$ cm. On trace un carré ABCD de 9 cm de côté, on place sur chaque côté les points à 3 cm de chaque sommet (I et J sur [AB], K et L sur [BC], M et N sur [CD], O et P sur [DA]), puis on trace l'octogone IJKLMNOP.

2. a) On a JB = 3 cm et BK = 3 cm. Le triangle JBK est rectangle en B (angle du carré), donc d'après le **théorème de Pythagore** :
$JK^2 = JB^2 + BK^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$, donc $JK = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. **JK = $\sqrt{18}$ cm ≈ 4,24 cm.**

2. b) Un octogone régulier a ses huit côtés de même longueur. Ici IJ = 3 cm alors que JK ≈ 4,24 cm : $IJ \neq JK$. **L'octogone IJKLMNOP n'est donc pas régulier.**

2. c) L'octogone s'obtient en retirant au carré quatre triangles rectangles isocèles identiques (aux coins A, B, C, D), dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 cm.
Aire du carré : $9 \times 9 = 81$ cm². Aire d'un triangle : $\dfrac{3 \times 3}{2} = 4{,}5$ cm². Aire de l'octogone : $81 - 4 \times 4{,}5 = 81 - 18 = 63$. **L'aire de l'octogone est 63 cm².**

3. a) On trace les diagonales [AC] et [BD], qui se coupent en S, puis le cercle de centre S et de rayon $9 \div 2 = 4{,}5$ cm. Ce cercle est tangent aux quatre côtés du carré (en leurs milieux).

3. b) Le rayon du disque est 4,5 cm. Son aire est $\pi \times 4{,}5^2 = 20{,}25\pi \approx 63{,}62$ cm².
Comme $63{,}62 > 63$, **le disque a une aire (légèrement) supérieure à celle de l'octogone.**

> ⚠ **Piège.** Le cercle a un diamètre de 9 cm : le rayon est 4,5 cm. Calculer $\pi \times 9^2$ donnerait une aire quatre fois trop grande. Et la différence est faible (environ 0,6 cm²) : garde au moins deux décimales pour conclure.

Exercice 2

1. Sur l'annexe, B et C sont donnés (BC = 5,2 cm). Au compas, on trace l'arc de centre B et de rayon 2 cm et l'arc de centre C et de rayon 4,8 cm : leur point d'intersection est A. On trace ensuite [AB] et [AC].

2. Le plus grand côté est [BC].
D'une part $BC^2 = 5{,}2^2 = 27{,}04$; d'autre part $AB^2 + AC^2 = 2^2 + 4{,}8^2 = 4 + 23{,}04 = 27{,}04$.
On a $BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc d'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, **le triangle ABC est rectangle en A.**

3. La hauteur [SA] est perpendiculaire à la base, donc les faces SAB et SAC sont des triangles rectangles en A. Le patron se compose de quatre triangles :

- la base ABC (déjà tracée) ;
- le triangle SAB, rectangle en A, accolé au côté [AB] : on trace la perpendiculaire à (AB) en A, à l'extérieur du triangle ABC, et on y place un point S tel que AS = 3 cm ;
- le triangle SAC, rectangle en A, accolé au côté [AC] : de même, perpendiculaire à (AC) en A et point S' tel que AS' = 3 cm ;
- le triangle SBC, accolé au côté [BC] : ses côtés mesurent BC = 5,2 cm, SB et SC. On les reporte au compas depuis le patron (SB se mesure dans le triangle SAB, SC dans le triangle SAC). Par le calcul : $SB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6$ cm et $SC = \sqrt{3^2 + 4{,}8^2} = \sqrt{32{,}04} \approx 5{,}66$ cm. On trace l'arc de centre B de rayon SB et l'arc de centre C de rayon SC, de l'autre côté de [BC] par rapport à A : leur intersection est le troisième sommet S''.

4. La base ABC est un triangle rectangle en A : son aire est $\mathcal{B} = \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{2 \times 4{,}8}{2} = 4{,}8$ cm². La hauteur associée est SA = 3 cm.
$V = \dfrac{1}{3} \times 4{,}8 \times 3 = 4{,}8$. **Le volume de la pyramide SABC est 4,8 cm³.**

Problème – Rénovation d'un local : peinture, dallage et devis *(12 pts)*

Première partie : peinture des murs et du plafond

1. a) Le plafond est un rectangle de 6,40 m sur 5,20 m : $6{,}40 \times 5{,}20 = 33{,}28$. **L'aire du plafond est 33,28 m².**

1. b) Il faut 1 litre pour 4 m² : $33{,}28 \div 4 = 8{,}32$. **Il faut 8,32 litres de peinture pour le plafond.**

2. a) Les quatre murs forment, une fois « déroulés », un rectangle dont la longueur est le périmètre du sol et la hauteur 2,80 m.
Périmètre du sol : $2 \times (6{,}40 + 5{,}20) = 2 \times 11{,}60 = 23{,}20$ m. Aire totale des murs : $23{,}20 \times 2{,}80 = 64{,}96$ m².
Ouvertures : la porte mesure $2 \times 0{,}80 = 1{,}6$ m² et les trois baies $3 \times 2 \times 1{,}60 = 9{,}6$ m², soit $1{,}6 + 9{,}6 = 11{,}2$ m² qui ne se peignent pas.
Surface à peindre : $64{,}96 - 11{,}2 = 53{,}76$ m². **La surface de mur à peindre est 53,76 m², soit environ 54 m².**

> ⚠ **Piège.** On ne peint ni la porte ni les baies vitrées : n'oublie pas de soustraire leurs surfaces, sinon tu trouves 65 m² au lieu de 54 m².

2. b) $53{,}76 \div 4 = 13{,}44$. **Il faut 13,44 litres de peinture pour les murs** (13,5 L si l'on prend 54 m²).

3. Quantité totale : $8{,}32 + 13{,}44 = 21{,}76$ L. Un pot contient 5 L et $21{,}76 \div 5 = 4{,}352$: quatre pots (20 L) ne suffisent pas. **L'entreprise doit disposer de 5 pots de peinture.**

Deuxième partie : pose d'un dallage sur le sol

1. Algorithme d'Euclide :
$640 = 520 \times 1 + 120$
$520 = 120 \times 4 + 40$
$120 = 40 \times 3 + 0$
Le PGCD est le dernier reste non nul. $\mathbf{PGCD(640\,;\,520) = 40.}$

2. a) Le sol mesure 640 cm sur 520 cm. Pour poser les dalles sans découpe, leur côté doit être un diviseur commun de 640 et de 520, c'est-à-dire un diviseur de leur PGCD 40. Parmi 20, 30, 35, 40 et 45, seuls 20 et 40 divisent 40 (30, 35 et 45 ne divisent pas 640 : par exemple $640 \div 30 \approx 21{,}3$). **On peut choisir les dalles de 20 cm ou de 40 cm de côté.**

2. b) Dalles de 20 cm : $640 \div 20 = 32$ dalles dans la longueur et $520 \div 20 = 26$ dans la largeur, soit $32 \times 26 = 832$. **Il faut 832 dalles de 20 cm.**
Dalles de 40 cm : $640 \div 40 = 16$ et $520 \div 40 = 13$, soit $16 \times 13 = 208$. **Il faut 208 dalles de 40 cm.**
(Vérification par les aires : 33,28 m² = 332 800 cm² et $332\,800 \div 400 = 832$; $332\,800 \div 1\,600 = 208$.)

Troisième partie : coût du dallage

1. a) $9 \times 48 = 432$. **Avec le grossiste A, 9 paquets coûtent 432 €.**

1. b) $9 \times 42 + 45 = 378 + 45 = 423$. **Avec le grossiste B, 9 paquets coûtent 423 €.**

2. a) $\mathbf{P_A = 48n}$**.**

2. b) $\mathbf{P_B = 42n + 45}$**.**

3. a) P_A est une fonction linéaire : sa représentation est une droite passant par l'origine, par exemple par les points (0 ; 0) et (10 ; 480). P_B est une fonction affine : sa représentation est une droite passant par (0 ; 45) et (10 ; 465). On trace ces deux droites dans le repère de l'annexe 2 (on peut aussi utiliser le point (9 ; 423) calculé plus haut pour contrôler).

3. b) Les deux droites se coupent lorsque $48n = 42n + 45$, soit $6n = 45$, donc $n = 7{,}5$. Comme n est un nombre entier de paquets, on compare autour de cette valeur : pour 7 paquets, A coûte 336 € et B 339 € ; pour

8 paquets, A coûte 384 € et B 381 €.
Le grossiste A est le plus avantageux jusqu'à 7 paquets ; le grossiste B l'est à partir de 8 paquets.

> 💡 **Astuce.** Sur le graphique, la droite la plus basse donne le tarif le moins cher. Pour conclure proprement, complète ta lecture par le calcul exact du point d'intersection, puis teste les deux nombres entiers qui l'encadrent.

Conseils pour le jour J

Ce sujet comporte beaucoup de constructions (figure en vraie grandeur, patron, graphique) : elles rapportent des points faciles si tu les fais au compas et à la règle, proprement, en laissant les traits de construction. Prévois ton matériel et ne les garde pas pour la fin.

Dans le problème, lis bien chaque donnée : les ouvertures à retirer de la surface des murs, les centimètres à utiliser pour le dallage (640 et 520 cm), les frais de livraison qui ne se paient qu'une fois. Arrondis toujours le nombre de pots au nombre entier supérieur : on n'achète pas 4,35 pots.

Pour les questions « a-t-il raison ? » ou « est-ce régulier ? », la réponse seule ne vaut rien : un calcul littéral (développement) ou un contre-exemple chiffré doit l'accompagner.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).