Corrigé – Brevet 2010 – mathématiques – BrevetAmeriqueSudnov2010 (remplacement)

Calculs, racines carrées, identités remarquables et système, Cercle circonscrit, rectangle et triangle rectangle (trigonométrie, Thalès), Club d'équitation : comparer trois formules (inéquation et graphique)

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Activités numériques – Calculs, racines carrées, identités remarquables et système *(12 pts)*

Exercice 1

1. $486 - 13 \times 8 = 486 - 104 = 382$, donc $A = \dfrac{927}{382} \approx 2{,}4267$. $A \approx 2{,}43$ **à 0,01 près.**

2. $3 \times 10^5 - 6 \times 10^3 = 300\,000 - 6\,000 = 294\,000$, donc $B = \dfrac{294\,000}{3 \times 10^{11}} = \dfrac{98\,000}{10^{11}} = 9{,}8 \times 10^4 \times 10^{-11}$. $B = 9{,}8 \times 10^{-7}$**.**

3. $442{,}5 - 7^2 \times 2{,}5 = 442{,}5 - 49 \times 2{,}5 = 442{,}5 - 122{,}5 = 320$, puis $\dfrac{320}{5} = 64$. $C = \sqrt{64} = 8$**.**

4. À la calculatrice, $D = \sqrt{6} - \sqrt{5} \approx 0{,}2134$ et $E = \dfrac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} \approx 0{,}2134$. **Les nombres D et E sont égaux.**
En effet, $(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5}) = 6 - 5 = 1$, donc $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ est l'inverse de $\sqrt{6} + \sqrt{5}$.

> 💡 **Astuce.** Deux valeurs approchées identiques ne prouvent pas l'égalité ; ici aucune justification n'est demandée, mais le produit $(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5}) = 1$ le démontre en une ligne.

Exercice 2

L'aire d'un carré de côté c est c^2. Donc $c^2 = 225$ et, c étant une longueur positive, $c = \sqrt{225} = 15$ cm. Le périmètre vaut $4 \times 15 = 60$. **Le périmètre du carré est 60 cm.**

Exercice 3

1. Avec $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, où $a = 3\sqrt{2}$ et $b = 5$:
$A = (3\sqrt{2})^2 + 2 \times 3\sqrt{2} \times 5 + 5^2 = 9 \times 2 + 30\sqrt{2} + 25 = 18 + 30\sqrt{2} + 25$.
$A = 43 + 30\sqrt{2}$ (a = 43 et b = 30).

2. Avec $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, où $a = \sqrt{7}$ et $b = 3$: $B = (\sqrt{7})^2 - 3^2 = 7 - 9$. $B = -2$**.**

Exercice 4

1. a) Pour $x = 10$ et $y = 2$: $45 \times 10 + 30 \times 2 = 450 + 60 = 510$ (la première équation est vérifiée) mais $27 \times 10 + 20 \times 2 = 270 + 40 = 310 \neq 316$. **Ce couple n'est pas solution du système** (il doit vérifier les deux équations).

1. b) Pour $x = 8$ et $y = 5$: $45 \times 8 + 30 \times 5 = 360 + 150 = 510$ et $27 \times 8 + 20 \times 5 = 216 + 100 = 316$. **Les deux équations sont vérifiées : $x = 8$ et $y = 5$ est solution du système.**

2. Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants. Les deux coûts donnent exactement le système de la question 1 :
$45x + 30y = 510$ et $27x + 20y = 316$.
Résolution par combinaison : on multiplie la première équation par 2 et la seconde par 3 : $90x + 60y = 1\,020$ et

$81x + 60y = 948$. Par soustraction : $9x = 72$, donc $x = 8$. Puis $30y = 510 - 45 \times 8 = 510 - 360 = 150$, donc $y = 5$.
On retrouve la solution de la question 1. b). **Le groupe compte 8 adultes et 5 enfants.**

Activités géométriques – Cercle circonscrit, rectangle et triangle rectangle (trigonométrie, Thalès) *(12 pts)*

Exercice 1

1. On trace un segment [BC] de 10 cm ; au compas, on trace l'arc de centre B de rayon 6 cm et l'arc de centre C de rayon 8 cm ; leur point d'intersection est A. On trace [AB] et [AC].

2. Dans le triangle ABC, le plus grand côté est [BC].
$BC^2 = 10^2 = 100$ et $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.
Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, d'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, **le triangle ABC est rectangle en A**.

3. a) Propriété : si un triangle est rectangle, alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu de son hypoténuse. Le triangle ABC est rectangle en A, d'hypoténuse [BC]. **Le point O est le milieu du segment [BC].**

3. b) [BC] est un diamètre du cercle, donc le rayon vaut $\dfrac{BC}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$. **Le rayon du cercle est 5 cm.**

4. Construction : dans le rectangle ABDC, les diagonales [AD] et [BC] ont le même milieu ; D est donc le symétrique de A par rapport à O (on prolonge [AO] d'une longueur égale à AO).
Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur et se coupent en leur milieu : $AD = BC = 10$ cm et O est le milieu de [AD], donc $OD = \dfrac{AD}{2} = 5$ cm. Le point D est à 5 cm du centre O, distance égale au rayon. **Le point D appartient au cercle circonscrit du triangle ABC.**

Exercice 2

1. Le triangle EFG est rectangle en E. Pour l'angle $\widehat{EFG}$, EF est le côté adjacent et FG l'hypoténuse : $\cos\widehat{EFG} = \dfrac{EF}{FG} = \dfrac{5}{13}$, d'où $\widehat{EFG} \approx 67{,}4°$. $\widehat{EFG} \approx 67°$ **au degré près.**

2. Dans le triangle EFG rectangle en E, d'après le **théorème de Pythagore** : $FG^2 = EF^2 + EG^2$, donc $EG^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$ et $EG = \sqrt{144} = 12$. **EG = 12 cm.**

3. M est sur [EG], donc $GM = EG - EM = 12 - 3 = 9$. **GM = 9 cm.**

4. La droite (MN) est perpendiculaire à (EG) par construction, et la droite (EF) est perpendiculaire à (EG) car le triangle EFG est rectangle en E. Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles. **Les droites (MN) et (EF) sont parallèles.**

5. Dans le triangle GEF, M est sur [GE], N est sur [GF] et (MN) est parallèle à (EF). D'après le **théorème de Thalès** : $\dfrac{GM}{GE} = \dfrac{GN}{GF} = \dfrac{MN}{EF}$.
$\dfrac{9}{12} = \dfrac{GN}{13}$, donc $GN = \dfrac{13 \times 9}{12} = \dfrac{117}{12} = 9{,}75$. **GN = 9,75 cm.**

> ⚠ **Piège.** Pour GN, le rapport est $\dfrac{GM}{GE}$ et non $\dfrac{EM}{EG}$: les longueurs se mesurent toutes depuis le sommet commun G.

Problème – Club d'équitation : comparer trois formules (inéquation et graphique) *(12 pts)*

Partie 1

1. Formule A : $7 \times 18 = 126$ €. Formule B : les cartes sont de 10 séances, il faut donc acheter une carte pour faire 7 séances : 165 €. Formule C : cotisation et une carte, $70 + 140 = 210$ €. **On retrouve bien 126 €, 165 € et 210 €.**

2. Pour 20 séances :
Formule A : $20 \times 18 = 360$ € ;
Formule B : 2 cartes, $2 \times 165 = 330$ € ;
Formule C : $70 + 2 \times 140 = 70 + 280 = 350$ €.
Pour 20 séances, la formule B est la plus avantageuse (330 €).

Partie 2

1.

PRIX	1 carte	2 cartes	5 cartes
Formule B	165 €	330 €	825 €
Formule C	210 €	350 €	770 €

(Formule B : $5 \times 165 = 825$; formule C : $70 + 5 \times 140 = 70 + 700 = 770$.)

2. a) Chaque carte coûte 165 €. **Coût avec la formule B :** $165x$ **euros.**

2. b) Cotisation de 70 € plus 140 € par carte. **Coût avec la formule C :** $140x + 70$ **euros.**

2. c) $140x + 70 \leqslant 165x$ donne $70 \leqslant 165x - 140x$, soit $70 \leqslant 25x$, donc $x \geqslant \dfrac{70}{25}$, c'est-à-dire $x \geqslant 2{,}8$. **Les solutions sont les nombres supérieurs ou égaux à 2,8.**

2. d) La formule C est avantageuse quand son coût est inférieur à celui de la formule B, c'est-à-dire quand $x \geqslant 2{,}8$. Comme x est un nombre entier de cartes, **la formule C devient avantageuse à partir de 3 cartes** (vérification : 3 cartes coûtent 495 € avec B et 490 € avec C).

Partie 3

1. f est une fonction linéaire : sa représentation est une droite passant par l'origine. Avec $f(3) = 495$, **on trace la droite passant par (0 ; 0) et (3 ; 495)**.
g est une fonction affine : sa représentation est une droite qui coupe l'axe des ordonnées en 70. Avec $g(3) = 140 \times 3 + 70 = 490$, **on trace la droite passant par (0 ; 70) et (3 ; 490)** (on peut vérifier avec $g(2) = 350$). L'axe vertical s'arrêtant à 550 €, les deux droites sortent du cadre peu après l'abscisse 3 (f) et 3,4 (g).

> 💡 **Astuce.** Choisis des points éloignés l'un de l'autre et qui tombent sur le quadrillage (abscisses entières) : le tracé est plus précis. Pour une fonction linéaire, l'origine est un point gratuit.

2. Les deux droites se coupent au point d'abscisse 2,8 (ordonnée 462 environ) ; on trace en pointillés la verticale qui descend de ce point jusqu'à l'axe des abscisses. À droite de ce point, la droite de g (formule C) est en dessous de celle de f (formule B). Le nombre de cartes étant entier, **la formule C devient avantageuse à partir de 3 cartes**.

Conseils pour le jour J

Ce sujet est très guidé : la question 1 de l'exercice 4 te donne la solution du système de la question 2, et la partie 2 du problème prépare la lecture graphique de la partie 3. Utilise ces résultats, en le disant, plutôt que de tout refaire.

Dans les problèmes de tarifs, pense que le nombre de cartes (ou de personnes) est entier : une inéquation qui donne $x \geqslant 2{,}8$ se conclut par « à partir de 3 cartes ». Vérifie toujours ta conclusion en calculant les deux prix pour cette valeur.

En géométrie, chaque réponse doit citer sa propriété : réciproque de Pythagore, cercle circonscrit d'un triangle rectangle, deux droites perpendiculaires à une même troisième, théorème de Thalès. Ce sont ces justifications qui rapportent l'essentiel des points.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).