Corrigé – Bac 2026 – spécialité mathématiques – Métropole, jour 2

Géométrie dans l'espace : plan, projeté orthogonal et volume d'un tétraèdre, Pollution d'un bassin : suite arithmético-géométrique et équation différentielle, Vrai ou faux : probabilités conditionnelles, loi binomiale, Bienaymé-Tchebychev, dénombrement, Fonction exponentielle, primitives, théorème des valeurs intermédiaires et intégration par parties : un porte-clé

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Géométrie dans l'espace : plan, projeté orthogonal et volume d'un tétraèdre *(5 pts)*

1. On calcule $\overrightarrow{AB}(3-2\,;-2-1\,;0-1)$, soit $\overrightarrow{AB}(1\,;-3\,;-1)$, et $\overrightarrow{AC}(0-2\,;-1-1\,;1-1)$, soit $\overrightarrow{AC}(-2\,;-2\,;0)$.

S'il existait un réel k tel que $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$, la troisième coordonnée donnerait $0=-k$, donc $k=0$, et la première donnerait alors $-2=0$: c'est impossible. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B, C ne sont pas alignés : **ils définissent un plan**.

2. a) On calcule les produits scalaires :

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=1\times1+(-1)\times(-3)+4\times(-1)=1+3-4=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-2)+(-1)\times(-2)+4\times0=-2+2+0=0$.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : $\vec{n}$ **est normal au plan** (ABC).

2. b) Un plan de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$. Le plan (ABC) a donc une équation de la forme $x-y+4z+d=0$. Comme $A(2\,;1\,;1)$ appartient au plan : $2-1+4\times1+d=0$, soit $5+d=0$, d'où $d=-5$. **Une équation cartésienne de** (ABC) **est** $x-y+4z-5=0$**.**

3. La droite Δ est orthogonale au plan (ABC), donc elle est dirigée par le vecteur normal $\vec{n}(1\,;-1\,;4)$. Elle passe par $D(0\,;0\,;2)$. Un point $M(x\,;y\,;z)$ appartient à Δ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{DM}=t\,\vec{n}$, c'est-à-dire $x-0=t$, $y-0=-t$ et $z-2=4t$. **On obtient bien** $x=t$**,** $y=-t$**,** $z=2+4t$**, avec** $t\in\mathbb{R}$**.**

4. Le projeté orthogonal H de D sur (ABC) est le point d'intersection de (ABC) et de la droite Δ passant par D et orthogonale à ce plan. On remplace la représentation paramétrique de Δ dans l'équation du plan :

$$t-(-t)+4(2+4t)-5=0 \iff 2t+8+16t-5=0 \iff 18t+3=0 \iff t=-\frac{1}{6}.$$

Avec $t=-\dfrac{1}{6}$: $x=-\dfrac{1}{6}$, $y=\dfrac{1}{6}$ et $z=2+4\times\left(-\dfrac{1}{6}\right)=2-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$. **Le projeté orthogonal de** D **sur** (ABC) **est** $H\left(-\dfrac{1}{6}\,;\dfrac{1}{6}\,;\dfrac{4}{3}\right)$**.**

5. a) $\overrightarrow{BA}(-1\,;3\,;1)$ donc $BA=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$, et $\overrightarrow{BC}(-3\,;1\,;1)$ donc $BC=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$. On a $BA=BC$: **le triangle** ABC **est isocèle en** B.

5. b) Soit I le milieu de $[AC]$: $I\left(\dfrac{2+0}{2}\,;\dfrac{1-1}{2}\,;\dfrac{1+1}{2}\right)$, soit $I(1\,;0\,;1)$. Dans le triangle ABC isocèle en B, la médiane issue de B est aussi la hauteur issue de B (on le vérifie : $\overrightarrow{BI}(-2\,;2\,;1)$ et $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\times(-2)+2\times(-2)+1\times0=0$).

$BI = \sqrt{4+4+1} = 3$ et $AC = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Donc $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AC \times BI}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}\times 3}{2} = 3\sqrt{2}$. **L'aire du triangle ABC est $3\sqrt{2}$ unités d'aire.**

6. a) On prend pour base le triangle ABC. Comme H est le projeté orthogonal de D sur (ABC), la hauteur relative à cette base est $h = DH$. $\overrightarrow{DH}\left(-\dfrac{1}{6}\,;\dfrac{1}{6}\,;\dfrac{4}{3}-2\right)$, soit $\overrightarrow{DH}\left(-\dfrac{1}{6}\,;\dfrac{1}{6}\,;-\dfrac{2}{3}\right)$, donc

$$DH = \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{16}{36}} = \sqrt{\frac{18}{36}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$V = \dfrac{1}{3}\times \mathcal{A}_{ABC} \times DH = \dfrac{1}{3}\times 3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\times 2}{2} = 1$. **Le volume du tétraèdre $ABCD$ est égal à 1 unité de volume.**

6. b) On prend maintenant pour base le triangle BCD ; la hauteur relative à cette base est la distance de A au plan (BCD), égale à $\sqrt{2}$. Le volume du tétraèdre ne dépend pas de la base choisie, donc $\dfrac{1}{3}\times\mathcal{A}_{BCD}\times\sqrt{2} = 1$, d'où $\mathcal{A}_{BCD} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **L'aire du triangle BCD est $\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}12$ unités d'aire.**

7. a) A, B, C définissent le plan (ABC), donc A, B, C, D_k sont coplanaires si et seulement si $D_k \in (ABC)$, c'est-à-dire $0 - 0 + 4k - 5 = 0$, soit $k = \dfrac{5}{4}$. **Les quatre points sont coplanaires pour $k = \dfrac{5}{4}$.** Le point $D_{5/4}\left(0\,;0\,;\dfrac{5}{4}\right)$ appartient alors au plan (ABC) : **il est son propre projeté orthogonal sur (ABC).**

7. b) Le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) est l'intersection du plan avec la droite passant par D_k et dirigée par $\vec{n}$, de représentation paramétrique $x = t$, $y = -t$, $z = k + 4t$ ($t \in \mathbb{R}$). Pour que ce projeté soit $A(2\,;1\,;1)$, il faudrait un réel t tel que $t = 2$ et $-t = 1$, c'est-à-dire $t = 2$ et $t = -1$: c'est impossible, quel que soit k.

Autrement dit, $\overrightarrow{AD_k}(-2\,;-1\,;k-1)$ n'est jamais colinéaire à $\vec{n}(1\,;-1\,;4)$ (le coefficient serait -2 d'après les abscisses et 1 d'après les ordonnées). **Il n'existe aucune valeur de k telle que A soit le projeté orthogonal de D_k sur (ABC).**

> **Astuce.** En 6. a), tu peux contrôler DH avec la formule de la distance d'un point à un plan : $\dfrac{|0-0+4\times 2-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{18}} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Même résultat : ton calcul est sûr.

Exercice 2 – Pollution d'un bassin : suite arithmético-géométrique et équation différentielle *(5 pts)*

Partie A : modèle discret

1. $V_1 = 0{,}995\times V_0 + 6 = 0{,}995\times 0 + 6 = 6$ et $V_2 = 0{,}995\times V_1 + 6 = 0{,}995\times 6 + 6 = 5{,}97 + 6 = 11{,}97$. $V_1 = 6$ **L et** $V_2 = 11{,}97$ **L.**

2. Programme complété :

```
def volume(n):
    v = 0
    for k in range(n):
        v = 0.995*v + 6
    return v
```

La variable v part de $V_0 = 0$; la boucle s'exécute n fois et remplace à chaque passage V_k par $V_{k+1} = 0{,}995V_k + 6$: la fonction renvoie bien V_n.

3. Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété : « $V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 1200$ ».

Initialisation. $V_0 = 0$ et $V_1 = 6$: on a bien $0 \leqslant 6 \leqslant 1200$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie : $V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 1200$. En multipliant par $0{,}995 > 0$ (l'ordre est conservé) : $0{,}995V_n \leqslant 0{,}995V_{n+1} \leqslant 0{,}995 \times 1200 = 1194$. En ajoutant 6 : $0{,}995V_n + 6 \leqslant 0{,}995V_{n+1} + 6 \leqslant 1200$, c'est-à-dire $V_{n+1} \leqslant V_{n+2} \leqslant 1200$. $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire ; par le principe de récurrence, **pour tout entier naturel n,** $V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 1200$.

4. D'après la question 3, la suite (V_n) est croissante et majorée par 1200. D'après le théorème de convergence monotone, **la suite (V_n) converge** vers une limite ℓ.

Pour tout n, $V_{n+1} = g(V_n)$ avec $g(x) = 0{,}995x + 6$, fonction affine donc continue sur $\mathbb{R}$. Par passage à la limite, $\ell = g(\ell)$: $\ell = 0{,}995\ell + 6 \iff 0{,}005\ell = 6 \iff \ell = \dfrac{6}{0{,}005} = 1200$. **La suite (V_n) converge vers** 1200 : à long terme, le volume de polluant se rapproche de 1200 L.

Partie B : modèle continu

1. a) L'équation (E) est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}005 \neq 0$ et $b = 6$. Ses solutions sont les fonctions $t \mapsto C\mathrm{e}^{at} - \dfrac{b}{a}$, avec C réel. Ici $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{6}{-0{,}005} = 1200$. **Les solutions de (E) sur $[0\,;+\infty[$ sont les fonctions $y(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}005t} + 1200$, $C \in \mathbb{R}$.**

1. b) v est solution de (E), donc il existe un réel C tel que $v(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}005t} + 1200$ pour tout $t \geqslant 0$. La condition $v(0) = 0$ donne $C \times \mathrm{e}^0 + 1200 = 0$, soit $C = -1200$. Donc $v(t) = -1200\mathrm{e}^{-0{,}005t} + 1200$, $v(t) = 1200\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}005t}\right)$ pour tout $t \in [0\,;+\infty[$.

1. c) $\lim\limits_{t\to+\infty}(-0{,}005t) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X = 0$, donc par composition $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-0{,}005t} = 0$. Par somme et produit, $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 1200$.

1. d) v est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $v'(t) = 1200 \times \left(-(-0{,}005)\mathrm{e}^{-0{,}005t}\right) = 6\mathrm{e}^{-0{,}005t}$. Une exponentielle est strictement positive, donc $v'(t) > 0$ pour tout $t \geqslant 0$. **La fonction v est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.**

2. $5\,\%$ du volume du bassin représentent $0{,}05 \times 30\,000 = 1500$ litres. Or, pour tout $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-0{,}005t} > 0$, donc $1 - \mathrm{e}^{-0{,}005t} < 1$ et $v(t) < 1200$. Le volume de polluant reste toujours inférieur à 1200 L, donc à 1500 L (le taux reste inférieur à $\dfrac{1200}{30\,000} = 4\,\%$). **Selon ce modèle, le propriétaire n'aura pas à procéder au nettoyage complet.**

3. On résout $v(t) > 50$ sur $[0\,;+\infty[$:

$$1200\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}005t}\right) > 50 \iff 1 - \mathrm{e}^{-0{,}005t} > \frac{1}{24} \iff \mathrm{e}^{-0{,}005t} < \frac{23}{24}.$$

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$: $\iff -0{,}005t < \ln\left(\dfrac{23}{24}\right) \iff t > -\dfrac{1}{0{,}005}\ln\left(\dfrac{23}{24}\right) = 200\ln\left(\dfrac{24}{23}\right)$ (on divise par $-0{,}005 < 0$, le sens de l'inégalité change).

Comme v est strictement croissante, **le volume dépasse 50 litres au-delà de l'instant $t_0 = 200\ln\left(\dfrac{24}{23}\right)$ heures**. On a $t_0 \approx 8{,}5119$ h et $0{,}5119 \times 60 \approx 30{,}7$ min : $t_0 \approx 8$ **h** 31 **min**.

> ⚠ **Piège.** En 3, au moment de diviser par $-0{,}005$, l'inégalité change de sens. Contrôle toujours ton résultat : $v(8) \approx 47{,}0 < 50$ et $v(9) \approx 52{,}8 > 50$, ce qui est cohérent avec $t_0 \approx 8{,}5$ h.

Exercice 3 – Vrai ou faux : probabilités conditionnelles, loi binomiale, Bienaymé-Tchebychev, dénombrement *(4 pts)*

Affirmation 1 : VRAIE. D'après l'énoncé, $P(O) = 0{,}52$, $P_O(F) = 0{,}32$ et $P(F) = 0{,}20$. On a $P(O \cap F) = P(O) \times P_O(F) = 0{,}52 \times 0{,}32 = 0{,}1664$. Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_F(O) = \frac{P(O \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}1664}{0{,}20} = 0{,}832.$$

Si la personne choisie est une femme, la probabilité qu'elle joue de la Pop est bien $0{,}832$.

Affirmation 2 : FAUSSE. On répète $5\,000$ fois, de façon identique et indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise), une épreuve de Bernoulli dont le succès « la personne est un musicien professionnel » a pour probabilité $0{,}062$; X compte le nombre de succès. Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5\,000\,;0{,}062)$.

À la calculatrice, $P(X \leqslant 340) \approx 0{,}96$, soit $1{,}0$ arrondi au dixième, et non $0{,}4$. On pouvait le pressentir : $E(X) = 5\,000 \times 0{,}062 = 310$ et 340 est nettement au-dessus de cette moyenne, donc $P(X \leqslant 340)$ est bien supérieure à $0{,}5$. **L'affirmation est fausse.**

Affirmation 3 : VRAIE. $E(X) = np = 310$ et $V(X) = np(1-p) = 5\,000 \times 0{,}062 \times 0{,}938 = 290{,}78$.

« $2300,P\left(|X-E(X)|\geqslant\delta\right)\leqslant\dfrac{V(X)}{\delta^2}. Avec \delta=80$:

$P\left(|X - 310| \geqslant 80\right) \leqslant \dfrac{290{,}78}{6\,400} \approx 0{,}0454$, donc $P(230

Comme $0{,}9546 > 0{,}95$, **la probabilité que le nombre de musiciens professionnels soit strictement compris entre 230 et 390 est supérieure à $95\,\%$: l'affirmation est vraie.**

Affirmation 4 : VRAIE. Former une équipe revient à choisir 2 musiciens professionnels parmi les 4 (l'ordre ne compte pas) et 3 autres personnes parmi les 6 non-musiciens. Par le principe multiplicatif :

$$\binom{4}{2} \times \binom{6}{3} = 6 \times 20 = 120.$$

On peut former 120 équipes différentes.

> ⚠ **Piège.** L'affirmation 4 compte les *équipes*, pas les *répartitions* des 10 joueurs en deux équipes : une fois la première équipe choisie, la seconde est imposée, donc il y a $\dfrac{120}{2} = 60$ répartitions, mais bien 120 équipes possibles. Lis toujours précisément ce qui est compté.

> 💡 **Astuce.** Pour Bienaymé-Tchebychev, commence toujours par écrire l'intervalle sous la forme $|X - E(X)| < \delta$: ici 230 et 390 sont symétriques par rapport à 310, avec $\delta = 80$. L'intervalle ouvert (« strictement ») correspond exactement au complémentaire de $|X - 310| \geqslant 80$.

Exercice 4 – Fonction exponentielle, primitives, théorème des valeurs intermédiaires et intégration par parties : un porte-clé *(6 pts)*

Partie A

1. a) La courbe C_f admet au point C d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses, donc de coefficient directeur nul. $f'(1) = 0$**.**

1. b) Sur $[0\,;3]$, la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point, $A\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$. **La solution de** $f(x) = 0$ **sur** $[0\,;3]$ **est** $x = \frac{1}{2}$**.**

2. $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A, qui passe par $A\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$ et $B(1\,;\mathrm{e}^2)$:

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\mathrm{e}^2 - 0}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\mathrm{e}^2}{\frac{1}{2}} = 2\mathrm{e}^2$. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\mathrm{e}^2 \approx 14{,}8$**.**

3. Si F est une primitive de f, alors $F' = f$. D'après le graphique, $f(x) < 0$ sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right[$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et $f(x) > 0$ sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ (la courbe est sous l'axe des abscisses avant A, au-dessus après). Donc toute primitive de f est **décroissante sur** $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$**, croissante sur** $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$**, et admet un minimum en** $x = \frac{1}{2}$.

- C_1 et C_2 décroissent puis croissent, avec un minimum atteint en $x = \frac{1}{2}$: elles conviennent.
- C_3 atteint son minimum vers $x \approx 0{,}9$: elle est donc encore décroissante sur un intervalle situé à droite de $\frac{1}{2}$ (par exemple entre 0,6 et 0,8), où pourtant $f > 0$. C_3 ne peut pas représenter une primitive de f.

De plus, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante : on vérifie que C_1 se déduit de C_2 par une translation verticale (environ 2 unités vers le haut : minimum à environ 0 contre environ -2, limites à droite environ 3,7 contre 1,7). **Les courbes** C_1 **et** C_2 **représentent des primitives de** f**.**

Partie B

1. a) Pour tout $x \geqslant 0$: $\mathrm{e}^2 \times \frac{2x-1}{\mathrm{e}^{2x-1}} = (2x-1)\,\mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^{-(2x-1)} = (2x-1)\,\mathrm{e}^{2-2x+1} = (2x-1)\,\mathrm{e}^{-2x+3} = f(x)$. **On a bien** $f(x) = \mathrm{e}^2 \times \frac{2x-1}{\mathrm{e}^{2x-1}}$**.**

1. b) On pose $X = 2x - 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$, donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$. Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{\mathrm{e}^{2x-1}} = 0$, puis, par produit par la constante e^2, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La courbe C_f admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.

2. a) $f = uv$ avec $u(x) = 2x - 1$, $u'(x) = 2$, et $v(x) = \mathrm{e}^{-2x+3}$, $v'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x+3}$ (dérivée de e^w : $w'\mathrm{e}^w$). Donc, pour tout $x \geqslant 0$:

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2\mathrm{e}^{-2x+3} + (2x-1) \times (-2)\mathrm{e}^{-2x+3} = (2 - 4x + 2)\,\mathrm{e}^{-2x+3}$, $f'(x) = (-4x + 4)\,\mathrm{e}^{-2x+3}$.

2. b) Pour tout x, $\mathrm{e}^{-2x+3} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $-4x + 4$, qui s'annule en $x = 1$, est strictement positif sur $[0\,;1[$ et strictement négatif sur $]1\,;+\infty[$. Valeurs : $f(0) = (0-1)\mathrm{e}^3 = -\mathrm{e}^3 \approx -20{,}09$; $f(1) = (2-1)\mathrm{e}^{-2+3} = \mathrm{e} \approx 2{,}72$; $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ (question 1. b)).

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\mathrm{e}^{3}$	croissante	e	décroissante	0

f est strictement croissante sur $[0\,;1]$, strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$, de maximum $f(1)=\mathrm{e}$.

3. Le contour du logo est formé de la portion de C_f sur $[0{,}5\,;\alpha]$ et de son symétrique par rapport à l'axe des abscisses. À l'abscisse α, l'extrémité droite du logo est le segment vertical joignant les points $(\alpha\,;f(\alpha))$ et $(\alpha\,;-f(\alpha))$, de longueur $f(\alpha)-(-f(\alpha))=2f(\alpha)$ (car $f(\alpha)>0$). L'unité étant 1 cm, la contrainte du client s'écrit $2f(\alpha)=0{,}3$, **soit** $f(\alpha)=0{,}15$.

Sur $[1\,;+\infty[$, f est continue (produit de fonctions continues) et strictement décroissante, avec $f(1)=\mathrm{e}\approx 2{,}72$ et $\lim\limits_{+\infty} f=0$; elle prend donc ses valeurs dans $]0\,;\mathrm{e}]$. Or $0{,}15\in\,]0\,;\mathrm{e}]$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), **l'équation $f(x)=0{,}15$ admet une unique solution α dans $[1\,;+\infty[$.**

À la calculatrice : $f(3{,}3)=5{,}6\,\mathrm{e}^{-3{,}6}\approx 0{,}1530>0{,}15$ et $f(3{,}4)=5{,}8\,\mathrm{e}^{-3{,}8}\approx 0{,}1298<0{,}15$, donc $3{,}3<\alpha<3{,}4$; puis $f(3{,}35)\approx 0{,}1409<0{,}15$, donc $3{,}3<\alpha<3{,}35$ (plus précisément $f(3{,}31)\approx 0{,}1505$ et $f(3{,}32)\approx 0{,}1481$). $\alpha\approx 3{,}3$**.**

Partie C

1. On pose $u(x)=2x-1$ et $v'(x)=\mathrm{e}^{-2x+3}$, d'où $u'(x)=2$ et $v(x)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x+3}$. Les fonctions u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[0{,}5\,;3{,}3]$. Par intégration par parties :

$$I=\Big[u(x)v(x)\Big]_{0{,}5}^{3{,}3}-\int_{0{,}5}^{3{,}3}u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{2x-1}{2}\mathrm{e}^{-2x+3}\right]_{0{,}5}^{3{,}3}+\int_{0{,}5}^{3{,}3}\mathrm{e}^{-2x+3}\,\mathrm{d}x.$$

Crochet : $-\dfrac{5{,}6}{2}\mathrm{e}^{-3{,}6}-\left(-\dfrac{0}{2}\mathrm{e}^{2}\right)=-2{,}8\,\mathrm{e}^{-3{,}6}$. Intégrale restante : $\left[-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x+3}\right]_{0{,}5}^{3{,}3}=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3{,}6}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2}$.

Donc $I=-2{,}8\,\mathrm{e}^{-3{,}6}-0{,}5\,\mathrm{e}^{-3{,}6}+0{,}5\,\mathrm{e}^{2}=0{,}5\,\mathrm{e}^{2}-3{,}3\,\mathrm{e}^{-3{,}6}\approx 3{,}6945-0{,}0902\approx 3{,}604$. $I=0{,}5\,\mathrm{e}^{2}-3{,}3\,\mathrm{e}^{-3{,}6}\approx 3{,}6$ **arrondi au dixième.**

2. Sur $[0{,}5\,;\alpha]$, $2x-1\geqslant 0$ donc $f(x)\geqslant 0$: la partie du logo située au-dessus de l'axe des abscisses a pour aire $\displaystyle\int_{0{,}5}^{\alpha}f(x)\,\mathrm{d}x$ (en cm², l'unité étant 1 cm), et la partie située en dessous a la même aire par symétrie. Avec $\alpha\approx 3{,}3$, l'aire du logo vaut donc environ $2I\approx 2\times 3{,}604\approx 7{,}21$ cm².

Volume du porte-clé : $\mathcal{V}\approx 2I\times 0{,}2=0{,}4\,I\approx 0{,}4\times 3{,}604\approx 1{,}44$ cm³. **Le volume du porte-clé est d'environ $1{,}4$ cm³.**

> 💡 **Astuce.** Le calcul de la partie C montre que $F(x)=-x\,\mathrm{e}^{-2x+3}$ est une primitive de f (vérifie : $F'(x)=-\mathrm{e}^{-2x+3}+2x\,\mathrm{e}^{-2x+3}=f(x)$). Son minimum vaut $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{\mathrm{e}^{2}}{2}\approx -3{,}7$ et sa limite en $+\infty$ est 0 : l'écart d'environ $3{,}7$ entre le minimum et la limite à droite se retrouve exactement sur C_1 et C_2, ce qui confirme la réponse de la partie A.

> ⚠ **Piège.** En partie C, I ne donne que la moitié supérieure du logo : n'oublie pas de multiplier par 2 (symétrie par rapport à l'axe des abscisses) avant de multiplier par l'épaisseur 0,2 cm.

Conseils pour le jour J

Ce sujet est long mais très classique : quatre exercices indépendants, à traiter dans l'ordre qui te met en confiance. Les exercices 1 et 2 sont des « questions de cours » enchaînées (vecteur normal, projeté orthogonal, récurrence, équation $y' = ay + b$) : chaque étape rapporte si tu nommes la propriété utilisée et poses le calcul. Dans l'exercice 1, beaucoup de questions donnent le résultat (« montrer que… ») : sers-t'en pour continuer même si tu bloques, et pense que H est l'intersection du plan et de Δ, pas un point à deviner.

L'exercice 3 est un vrai/faux : une réponse sans justification vaut zéro. Écris systématiquement la loi suivie par X avec ses paramètres, calcule $E(X)$ et $V(X)$, et pour Bienaymé-Tchebychev ramène l'intervalle à $|X - 310| < 80$. Pour le dénombrement, distingue bien « équipes » et « répartitions ».

L'exercice 4 demande de lire le graphique avec méthode (tangente horizontale, coefficient directeur entre deux points, signe de f pour les primitives) puis d'enchaîner limites, dérivée, tableau complet et théorème de la bijection. Pour α, donne l'encadrement qui justifie l'arrondi au dixième ($f(3{,}3) > 0{,}15 > f(3{,}35)$) ; pour l'intégration par parties, écris clairement u, v', u', v avant de calculer, et garde la valeur exacte de I jusqu'au bout.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).