Corrigé – Bac 2026 – spécialité mathématiques – Métropole, jour 1

Probabilités conditionnelles, variables aléatoires et inégalité de Bienaymé-Tchebychev, Vrai ou faux : géométrie dans l'espace et dénombrement, Équation différentielle et suite récurrente : chauffage d'une pièce, Fonction logarithme : lecture graphique, variations, théorème des valeurs intermédiaires et aire

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Probabilités conditionnelles, variables aléatoires et inégalité de Bienaymé-Tchebychev *(5 pts)*

Partie A

1. a) L'énoncé indique que 75 % des familles réservent une cabine : $P(C) = 0{,}75$.

1. b) D'après l'énoncé, $P(V) = 0{,}3$ et, parmi les familles qui réservent un emplacement pour un véhicule, 80 % réservent une cabine : $P_V(C) = 0{,}8$. On complète par les probabilités contraires (la somme des probabilités issues d'un même nœud vaut 1) :

- branche V : 0,3 ; branche $\overline{V}$: $1 - 0{,}3 = 0{,}7$;
- après V : branche C : 0,8 ; branche $\overline{C}$: $1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Les deux branches issues de $\overline{V}$ ne comportent pas de pointillés : elles ne sont pas demandées ici (la probabilité $P_{\overline{V}}(C)$ est l'objet de la question 4).

2. D'après la formule des probabilités composées : $P(V \cap C) = P(V) \times P_V(C) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$. $P(V \cap C) = 0{,}24$: 24 % des familles réservent à la fois un emplacement pour un véhicule et une cabine.

3. On cherche $P_C(V)$. Par définition d'une probabilité conditionnelle : $P_C(V) = \dfrac{P(V \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}24}{0{,}75} = 0{,}32$.

$P_C(V) = 0{,}32$: une famille qui a réservé une cabine a réservé un emplacement pour un véhicule avec une probabilité de 0,32.

4. V et $\overline{V}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales, $P(C) = P(V \cap C) + P(\overline{V} \cap C)$, donc $P(\overline{V} \cap C) = 0{,}75 - 0{,}24 = 0{,}51$.

Alors $P_{\overline{V}}(C) = \dfrac{P(\overline{V} \cap C)}{P(\overline{V})} = \dfrac{0{,}51}{0{,}7} = \dfrac{51}{70} \approx 0{,}728\,6$. $P_{\overline{V}}(C) \approx 0{,}73$ à 10^{-2} près.

Interprétation : parmi les familles qui ne réservent pas d'emplacement pour un véhicule, environ 73 % réservent une cabine.

> ⚠ **Piège.** En question 4, on ne peut pas lire $P_{\overline{V}}(C)$ sur l'arbre : il faut d'abord obtenir $P(\overline{V} \cap C)$ par les probabilités totales, puis diviser par $P(\overline{V}) = 0{,}7$ (et non par $P(C)$).

Partie B

On remarque que la loi de X est cohérente avec la partie A : $P(X = 170) = P(V \cap C) = 0{,}24$, $P(X = 100) = P(\overline{V} \cap C) = 0{,}51$, $P(X = 70) = P(V \cap \overline{C}) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$ et $P(X = 0) = 1 - 0{,}24 - 0{,}51 - 0{,}06 = 0{,}19$.

1. Par définition de l'espérance :

$E(X) = 0 \times 0{,}19 + 70 \times 0{,}06 + 100 \times 0{,}51 + 170 \times 0{,}24 = 0 + 4{,}2 + 51 + 40{,}8 = 96$. $\boldsymbol{E(X) = 96}$.

D'après la formule de König-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, avec

$E(X^2) = 0^2 \times 0{,}19 + 70^2 \times 0{,}06 + 100^2 \times 0{,}51 + 170^2 \times 0{,}24 = 0 + 294 + 5\,100 + 6\,936 = 12\,330$.

Donc $V(X) = 12\,330 - 96^2 = 12\,330 - 9\,216 = 3\,114$. $V(X) = 3\,114$**.**

2. a) Le montant total payé avant réduction pour les suppléments et les extras est $X + Y$. Une remise de 40 % revient à multiplier ce montant par $1 - \dfrac{40}{100} = 0{,}6$. Donc $Z = 0{,}6(X + Y)$.

2. b) Par linéarité de l'espérance : $E(Z) = 0{,}6\,(E(X) + E(Y)) = 0{,}6 \times (96 + 104) = 0{,}6 \times 200 = 120$.
$E(Z) = 120$**.**

Pour tout réel a, $V(aW) = a^2 V(W)$; de plus, X et Y étant indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. Donc :

$V(Z) = 0{,}6^2\,(V(X) + V(Y)) = 0{,}36 \times (3\,114 + 1\,686) = 0{,}36 \times 4\,800 = 1\,728$. $V(Z) = 1\,728$**.**

3. a) Par linéarité de l'espérance, les Z_i ayant toutes la même loi que Z :

$E(M_n) = \dfrac{1}{n}\,(E(Z_1) + E(Z_2) + \cdots + E(Z_n)) = \dfrac{1}{n} \times n \times 120 = 120$. $E(M_n) = 120$**.**

Les variables $Z_1, \ldots, Z_n$ étant indépendantes, la variance de leur somme est la somme des variances, et $V\left(\dfrac{1}{n}S\right) = \dfrac{1}{n^2}V(S)$:

$V(M_n) = \dfrac{1}{n^2}\,(V(Z_1) + \cdots + V(Z_n)) = \dfrac{1}{n^2} \times n \times 1\,728 = \dfrac{1\,728}{n}$. $V(M_n) = \dfrac{1\,728}{n}$**.**

3. b) On remarque que $114 < M_n < 126 \iff -6 < M_n - 120 < 6 \iff |M_n - 120| < 6$: l'intervalle est centré sur $E(M_n) = 120$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $\delta > 0$, $P\left(|M_n - E(M_n)| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V(M_n)}{\delta^2}$. Avec $\delta = 6$:

$P(|M_n - 120| \geqslant 6) \leqslant \dfrac{1\,728}{36n} = \dfrac{48}{n}$, donc, par passage à l'événement contraire, $P(114 < M_n < 126) = 1 - P(|M_n - 120| \geqslant 6) \geqslant 1 - \dfrac{48}{n}$.

L'inégalité permet d'affirmer $P(114 < M_n < 126) \geqslant 0{,}85$ dès que $1 - \dfrac{48}{n} \geqslant 0{,}85 \iff \dfrac{48}{n} \leqslant 0{,}15 \iff n \geqslant \dfrac{48}{0{,}15} = 320$.

Le plus petit entier cherché est $n = 320$.

Interprétation : si l'on choisit au hasard au moins 320 familles bénéficiant de la réduction, la probabilité que le prix total moyen payé pour les suppléments et les extras soit strictement compris entre 114 € et 126 € est au moins égale à 0,85.

> 💡 **Astuce.** Avant d'appliquer Bienaymé-Tchebychev, réécris toujours l'événement sous la forme $|M_n - E(M_n)| < \delta$: ici $\delta = 6$, donc $\delta^2 = 36$, et $\dfrac{1\,728}{36} = 48$ rend la suite du calcul très simple.

Exercice 2 – Vrai ou faux : géométrie dans l'espace et dénombrement *(4 pts)*

1. a) Affirmation 1 : vraie.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-3\\1-0\\-3-2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}$. D'après l'équation $-x+y-5z-0{,}5=0$, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}$ est normal au plan (P). Comme $\overrightarrow{AB}=\vec{n}$, le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de la droite (AB) est normal à (P) : la droite (AB) est orthogonale au plan (P).

Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{3+2}{2};\frac{0+1}{2};\frac{2-3}{2}\right)$, soit $I(2{,}5;0{,}5;-0{,}5)$. On vérifie : $-2{,}5+0{,}5-5\times(-0{,}5)-0{,}5=-2{,}5+0{,}5+2{,}5-0{,}5=0$. Donc $I\in(P)$.

Le plan (P) est orthogonal à (AB) et passe par le milieu de $[AB]$ (c'est le plan médiateur de $[AB]$) : l'affirmation est vraie.

1. b) Affirmation 2 : fausse.

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires : si $\overrightarrow{AB}=k\vec{u}$, la première coordonnée donne $k=-1$, mais la troisième donne $-5=-2k=2$, ce qui est faux. Les droites ne sont donc pas parallèles.

Une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases}x=3-s\\y=s\\z=2-5s\end{cases}$, $s\in\mathbb{R}$. Les droites sont sécantes si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases}t=3-s\\-1{,}5-t=s\\2-2t=2-5s\end{cases}$$

En remplaçant t par $3-s$ dans la deuxième équation : $-1{,}5-(3-s)=s$, soit $-4{,}5+s=s$, soit $-4{,}5=0$: c'est impossible. Le système n'a pas de solution, les droites (d) et (AB) n'ont aucun point commun.

Non parallèles et sans point commun, les droites (d) et (AB) sont non coplanaires : elles ne sont pas sécantes. L'affirmation est fausse.

> 💡 **Astuce.** Contrôle rapide : pour tout point de (d), $x+y=t+(-1{,}5-t)=-1{,}5$, et pour tout point de (AB), $x+y=(3-s)+s=3$. Un point commun devrait vérifier $-1{,}5=3$: impossible.

1. c) Affirmation 3 : vraie.

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}3-1{,}5\\0-(-3)\\2-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}5\\3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}2-1{,}5\\1-(-3)\\-3-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5\\4\\-2\end{pmatrix}$.

Produit scalaire (repère orthonormé) : $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=1{,}5\times0{,}5+3\times4+3\times(-2)=0{,}75+12-6=6{,}75$.

Normes : $CA=\sqrt{1{,}5^2+3^2+3^2}=\sqrt{2{,}25+9+9}=\sqrt{20{,}25}=4{,}5$ et $CB=\sqrt{0{,}5^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{0{,}25+16+4}=\sqrt{20{,}25}=4{,}5$.

Or $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=CA\times CB\times\cos\widehat{ACB}$, donc $\cos\widehat{ACB}=\dfrac{6{,}75}{4{,}5\times4{,}5}=\dfrac{6{,}75}{20{,}25}=\dfrac{1}{3}$.

À la calculatrice, $\widehat{ACB}=\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\approx70{,}53°$, soit $\widehat{ACB}\approx70{,}5°$ à 10^{-1} près. L'affirmation est vraie.

2. Affirmation 4 : vraie.

Porte A : un code est une liste ordonnée de 3 symboles distincts choisis parmi 8, c'est-à-dire un arrangement (3-uplet d'éléments distincts). Il y en a $8 \times 7 \times 6 = 336$. Les choix étant équiprobables et un seul code étant le bon, Clotilde ouvre sa porte avec une probabilité $p_A = \dfrac{1}{336}$.

Porte B : l'ordre de saisie n'intervient pas, un code est donc une partie (combinaison) de 4 symboles parmi 8. Il y en a $\binom{8}{4} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$. Titouan ouvre sa porte avec une probabilité $p_B = \dfrac{1}{70}$.

Comme $70 < 336$, on a $\dfrac{1}{70} > \dfrac{1}{336}$, soit $p_B > p_A$: **Titouan a plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde**. L'affirmation est vraie.

> ⚠ **Piège.** « Dans l'ordre » signifie arrangements ($8 \times 7 \times 6$) ; « dans n'importe quel ordre » signifie combinaisons ($\binom{8}{4}$). Confondre les deux inverse la conclusion.

Exercice 3 – Équation différentielle et suite récurrente : chauffage d'une pièce *(6 pts)*

Partie A : Phase de chauffage

1. L'équation (E) est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}035 \neq 0$ et $b = 0{,}91$. Ses solutions sont les fonctions $t \mapsto K\mathrm{e}^{at} - \dfrac{b}{a}$, $K \in \mathbb{R}$. Or $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{0{,}91}{0{,}035} = 26$.

Les solutions de (E) sur $[0;+\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto K\mathrm{e}^{-0{,}035t} + 26$, où K est un réel quelconque.

2. T est solution de (E), donc il existe un réel K tel que, pour tout $t \geqslant 0$, $T(t) = K\mathrm{e}^{-0{,}035t} + 26$. La condition $T(0) = 18$ donne $K\mathrm{e}^{0} + 26 = 18$, soit $K = -8$.

Donc, pour tout $t \in [0;+\infty[$, $T(t) = 26 - 8\mathrm{e}^{-0{,}035t}$.

3. On résout $T(t) = 20$ sur $[0;+\infty[$:

$$26 - 8\mathrm{e}^{-0{,}035t} = 20 \iff 8\mathrm{e}^{-0{,}035t} = 6 \iff \mathrm{e}^{-0{,}035t} = 0{,}75 \iff -0{,}035t = \ln(0{,}75) \iff t = \frac{-\ln(0{,}75)}{0{,}035} = \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{0{,}035},$$

par stricte croissance de la fonction ln sur $]0;+\infty[$. On a $t \approx 8{,}219$ dizaines de minutes, soit environ 82,19 minutes.

Comme 82 minutes = 1 h 22 min, **la pièce atteint 20 °C au bout d'environ 1 h 22 min**.

4. Pour tout $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-0{,}035t} > 0$, donc $8\mathrm{e}^{-0{,}035t} > 0$ et $T(t) = 26 - 8\mathrm{e}^{-0{,}035t} < 26$.

Ainsi, même si le chauffage ne s'éteint jamais, la température reste strictement inférieure à 26 °C (elle tend vers 26 °C car $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0{,}035t} = 0$). **Selon ce modèle, la température ne pourra pas dépasser 28 °C.**

Partie B : Phase de refroidissement

1. Avec $n = 0$: $u_1 = 0{,}965u_0 + 0{,}35 + 0{,}07\mathrm{e}^{-0{,}1 \times 0} = 0{,}965 \times 20 + 0{,}35 + 0{,}07 \times 1 = 19{,}3 + 0{,}35 + 0{,}07 = 19{,}72$. $u_1 = 19{,}72$**.**

2. Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n > 10$ ».

Initialisation. $u_0 = 20 > 10$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n > 10$. Alors, comme $0{,}965 > 0$: $0{,}965u_n > 9{,}65$, puis $0{,}965u_n + 0{,}35 > 10$. De plus, $0{,}07\mathrm{e}^{-0{,}1n} > 0$ (une exponentielle est strictement positive). Donc $u_{n+1} = 0{,}965u_n + 0{,}35 + 0{,}07\mathrm{e}^{-0{,}1n} > 10$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire ; d'après le principe de récurrence, **pour tout entier naturel n, $u_n > 10$.**

3. La suite (u_n) est décroissante (admis) et minorée par 10 (question 2). D'après le théorème de convergence monotone, **la suite (u_n) est convergente**.

4. a) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(-0{,}1n) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X = 0$, donc par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}07\mathrm{e}^{-0{,}1n} = 0$.

D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. D'autre part, par opérations sur les limites,
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(0{,}965u_n + 0{,}35 + 0{,}07\mathrm{e}^{-0{,}1n}\right) = 0{,}965\ell + 0{,}35 + 0$.

Par unicité de la limite, en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = 0{,}965u_n + 0{,}35 + 0{,}07\mathrm{e}^{-0{,}1n}$, on obtient $\ell = 0{,}965\ell + 0{,}35$: ℓ est solution de l'équation $x = 0{,}965x + 0{,}35$.

4. b) $x = 0{,}965x + 0{,}35 \iff 0{,}035x = 0{,}35 \iff x = \dfrac{0{,}35}{0{,}035} = 10$. Donc $\ell = 10$.

Interprétation : si le chauffage ne se remettait jamais en marche, la température de la pièce baisserait et se rapprocherait, à long terme, de 10 °C (sans jamais descendre jusqu'à 10 °C, d'après la question 2).

5. a) La boucle doit tourner tant que la température est strictement supérieure à 18 °C ; à chaque tour, on calcule le terme suivant avec la valeur actuelle de n, puis on augmente n de 1. Programme complété (avec l'import de la fonction exponentielle) :

```
from math import exp
def marche() :
    n = 0
    u = 20
    while u > 18 :
        u = 0.965*u + 0.35 + 0.07*exp(-0.1*n)
        n = n + 1
    return n
```

> ⚠ **Piège.** L'ordre des lignes 5 et 6 compte : u_{n+1} se calcule avec $\mathrm{e}^{-0{,}1n}$, donc on met à jour u avec l'ancienne valeur de n avant d'incrémenter n. La condition est « u > 18 » car le chauffage repart dès que la température est inférieure ou égale à 18 °C.

5. b) À la calculatrice (ou en exécutant le programme), on obtient, arrondis à 10^{-2} :

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
u_n	20	19,72	19,44	19,17	18,90	18,64	18,38	18,12	17,87

On a $u_7 \approx 18{,}12 > 18$ et $u_8 \approx 17{,}87 \leqslant 18$; la suite étant décroissante, $u_n > 18$ pour $n \leqslant 7$. La fonction renvoie donc 8.

Le chauffage se remet en marche au bout de 8 dizaines de minutes, soit 80 minutes (1 h 20 min) après son arrêt.

Exercice 4 – Fonction logarithme : lecture graphique, variations, théorème des valeurs intermédiaires et aire *(5 pts)*

Partie A

1. Le point $A(0;1)$ appartient à la courbe de f, donc $f(0)=1$. Or $f(0)=a+\dfrac{b\ln(0+1)}{0+1}=a+\dfrac{b\times 0}{1}=a$ car $\ln 1=0$. Donc $a=1$.

2. a) $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A à la courbe au point d'abscisse 0. Sur le graphique, T_A passe par $A(0;1)$ et par le point de coordonnées $(1;5)$: son coefficient directeur est $\dfrac{5-1}{1-0}=4$. Donc $f'(0)=4$.

2. b) Au voisinage de $x=1$, la courbe est située en dessous de ses tangentes (elle « s'incurve vers le bas » : les pentes des tangentes diminuent, de 4 en $x=0$ jusqu'à 0 au sommet de la courbe, atteint vers $x\approx 1{,}7$). La fonction f est donc concave sur un intervalle contenant 1, ce qui signifie que f'' y est négative. $f''(1)$ **est négatif.** (Le calcul le confirme : on trouve $f''(x)=\dfrac{4\left(2\ln(x+1)-3\right)}{(x+1)^3}$, d'où $f''(1)=\dfrac{2\ln 2-3}{2}<0$.)

3. a) Avec $a=1$, $f(x)=1+b\times\dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)=\ln(x+1)$, $u'(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $v(x)=x+1$, $v'(x)=1$ (v ne s'annule pas sur $]-1;+\infty[$). D'après la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$:

$$f'(x)=b\times\frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1)-\ln(x+1)\times 1}{(x+1)^2}=\frac{b\left(1-\ln(x+1)\right)}{(x+1)^2}$$ pour tout $x\in]-1;+\infty[$.

(Si a n'était pas encore fixé, la constante a a une dérivée nulle : le résultat est le même.)

3. b) D'après 3. a), $f'(0)=\dfrac{b(1-\ln 1)}{1^2}=b$. D'après 2. a), $f'(0)=4$. Donc $b=4$.

Partie B

Dans toute la partie, $f(x)=1+\dfrac{4\ln(x+1)}{x+1}$ sur $]-1;+\infty[$.

1. Posons $X=x+1$: quand $x\to+\infty$, $X\to+\infty$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln X}{X}=0$, donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1+4\times 0=1$.

La droite d'équation $y=1$ est asymptote (horizontale) à la courbe de f en $+\infty$.

2. Pour $x>-1$, $x+1>0$ et : $1-\ln(x+1)>0 \iff \ln(x+1)<1 \iff x+1<\mathrm{e} \iff x<\mathrm{e}-1$, par stricte croissance de la fonction exponentielle.

En tenant compte de $x>-1$: $S=]-1;\mathrm{e}-1[$.

3. D'après la partie A (avec $b=4$), pour tout $x>-1$, $f'(x)=\dfrac{4\left(1-\ln(x+1)\right)}{(x+1)^2}$. Comme $4>0$ et $(x+1)^2>0$, $f'(x)$ a le signe de $1-\ln(x+1)$. D'après la question 2 :

- $f'(x)>0$ sur $]-1;\mathrm{e}-1[$: f est strictement croissante sur $]-1;\mathrm{e}-1]$;
- $f'(\mathrm{e}-1)=0$;
- $f'(x)<0$ sur $]\mathrm{e}-1;+\infty[$: f est strictement décroissante sur $[\mathrm{e}-1;+\infty[$.

Maximum : $f(\mathrm{e}-1)=1+\dfrac{4\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}=1+\dfrac{4}{\mathrm{e}}\approx 2{,}47$.

Tableau de variation :

x	-1		$\mathrm{e}-1$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
variations de f	$\|\|\ -\infty$	croissante $\nearrow$	$1+\dfrac{4}{\mathrm{e}}$	décroissante $\searrow$	1

f admet un maximum égal à $1+\dfrac{4}{\mathrm{e}}$, atteint en $x=\mathrm{e}-1$. (Limites : $-\infty$ en -1, admise ; 1 en $+\infty$, question 1.)

4. Comme $\mathrm{e}-1\approx 1{,}72<2$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[2;+\infty[$.

$f(2)=1+\dfrac{4\ln 3}{3}\approx 2{,}46>1{,}5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1<1{,}5$. Donc $1{,}5$ est compris entre $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $f(2)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), **l'équation $f(x)=1{,}5$ admet une unique solution α dans $[2;+\infty[$.**

À la calculatrice : $f(25{,}05)\approx 1{,}500\,6>1{,}5$ et $f(25{,}15)\approx 1{,}499\,3<1{,}5$, donc $25{,}05<\alpha<25{,}15$ (plus précisément $\alpha\approx 25{,}09$). $\alpha\approx 25{,}1$ à 10^{-1} près.

5. a) Posons $u(x)=\ln(x+1)$ sur $[0;2]$; u est dérivable et $u'(x)=\dfrac{1}{x+1}$. Alors $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=u'(x)\,u(x)$, qui admet pour primitive $\dfrac{1}{2}u(x)^2=\dfrac{1}{2}\left(\ln(x+1)\right)^2$. Donc :

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\left(\ln(x+1)\right)^2\right]_0^2=\frac{1}{2}(\ln 3)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2=\frac{1}{2}(\ln 3)^2.$$

> **Astuce.** Repère la forme $u'u$: la dérivée de $\ln(x+1)$ est exactement $\dfrac{1}{x+1}$, d'où la primitive $\dfrac{u^2}{2}$. C'est la clé de la question 5.

5. b) Pour $x\in[0;2]$, $x+1\geqslant 1$ donc $\ln(x+1)\geqslant 0$, et $f(x)=1+\dfrac{4\ln(x+1)}{x+1}\geqslant 1>0$. La fonction f étant continue et positive sur $[0;2]$, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine demandé (en unités d'aire) vaut :

$$\mathcal{A}=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 1\,\mathrm{d}x+4\int_0^2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x \text{ (linéarité de l'intégrale)}$$

$$\mathcal{A}=2+4\times\frac{1}{2}(\ln 3)^2=2+2(\ln 3)^2.$$

L'aire du domaine est $2+2(\ln 3)^2\approx 4{,}41$ unités d'aire.

Conseils pour le jour J

Exercice 1 : la partie B s'enchaîne sans difficulté si tu cites les bonnes propriétés (linéarité de l'espérance, $V(aX)=a^2V(X)$, additivité de la variance *grâce à l'indépendance*). Pour Bienaymé-Tchebychev, écris d'abord $114<M_n<126 \iff |M_n-120|<6$, passe à l'événement contraire, puis résous $1-\dfrac{48}{n}\geqslant 0{,}85$: n'oublie pas la phrase d'interprétation, elle est notée.

Exercice 2 : dans un vrai/faux, une réponse sans justification vaut zéro. Pour deux droites de l'espace, vérifie d'abord la colinéarité des vecteurs directeurs, puis résous le système en entier ; pour l'angle, le produit scalaire et les deux normes suffisent. Pour les codes, distingue bien liste ordonnée (arrangements) et partie (combinaisons).

Exercices 3 et 4 : ce sont les plus rentables. Récite la forme des solutions de $y' = ay + b$, rédige la récurrence en trois étapes, et donne l'heure demandée en heures et minutes (1 h 22 min, pas « 8,22 »). Pour l'exercice 4, justifie chaque lecture graphique en une phrase, repère la forme $u'u$ en 5. a) et vérifie la positivité de f sur $[0;2]$ avant de parler d'aire. Garde environ une heure pour chacun des exercices 3 et 4.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).