Corrigé – Bac 2025 – spécialité mathématiques – Métropole, jour 2

Probabilités conditionnelles, loi binomiale et somme de variables aléatoires, Géométrie dans l'espace : droites sécantes, plan et projeté orthogonal, Vrai ou faux : suites, convexité et inégalité logarithmique, Équation différentielle et fonction exponentielle : freinage d'un chariot

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Probabilités conditionnelles, loi binomiale et somme de variables aléatoires *(5 pts)*

Partie A

1. Arbre pondéré : depuis la racine, A avec la probabilité 0,6 et $\bar{A}$ avec 0,4. Après A : B avec $P_A(B) = 0{,}3$ et $\bar{B}$ avec 0,7. Après $\bar{A}$: B avec $P_{\bar{A}}(B) = 0{,}4$ et $\bar{B}$ avec 0,6.

2. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$. $P(A \cap B) = 0{,}18$: 18 % des personnes chutent lors des deux séances.

3. A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0{,}18 + 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}18 + 0{,}16 = 0{,}34$. **$P(B) = 0{,}34$.**

4. On cherche $P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \dfrac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$. Or $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$ et $P(\bar{B}) = 1 - 0{,}34 = 0{,}66$. Donc $P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \dfrac{0{,}24}{0{,}66} = \dfrac{4}{11} \approx 0{,}364$. **Sachant qu'elle n'a pas chuté à la deuxième séance, la probabilité qu'elle n'ait pas chuté à la première est environ $0{,}364$.**

5. a) On répète 100 fois, de façon identique et indépendante (tirage avec remise), l'épreuve de Bernoulli « la personne ne chute à aucune des deux séances », de probabilité 0,24 ; X compte les succès. **X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100 ; 0{,}24)$.**

5. b) $P(X \geqslant 20) = 1 - P(X \leqslant 19) \approx 1 - 0{,}145 = 0{,}855$ (calculatrice). **La probabilité d'avoir au moins 20 personnes n'ayant jamais chuté est environ $0{,}855$.**

5. c) $E(X) = np = 100 \times 0{,}24 = 24$. **En moyenne, dans un échantillon de 100 personnes, 24 ne chutent ni à la première ni à la deuxième séance.**

Partie B

1. Par linéarité de l'espérance, $E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 40 + 60 = 100$. **Le temps d'attente total moyen sur le week-end est de 100 minutes.**

2. T_1 et T_2 sont indépendantes, donc $V(T) = V(T_1) + V(T_2) = \sigma(T_1)^2 + \sigma(T_2)^2 = 10^2 + 16^2 = 100 + 256$. $V(T) = 356$**.**

3. L'événement $\{60

Donc $P(600{,}77$. **La probabilité que le temps total d'attente soit strictement compris entre 60 et 140 minutes est supérieure à $0{,}77$.**

Exercice 2 – Géométrie dans l'espace : droites sécantes, plan et projeté orthogonal *(5 pts)*

Partie A

1. d a pour vecteur directeur $\vec{u}(2;1;-1)$ et d' a pour vecteur directeur $\vec{u}'(1;1;-2)$; ils ne sont pas colinéaires (les coordonnées ne sont pas proportionnelles : $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{1}$), donc les droites ne sont pas parallèles.

Pour $t=-1$, le point de d est $\left(\frac{3}{2}-2;2-1;3+1\right)=\left(-\frac{1}{2};1;4\right)=S$. Pour $s=-\frac{1}{2}$, le point de d' est $\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}-\frac{1}{2};3+1\right)=\left(-\frac{1}{2};1;4\right)=S$. Le point S appartient aux deux droites, qui ne sont pas parallèles : d **et** d' **sont sécantes en** $S\left(-\frac{1}{2};1;4\right)$.

2. a) $\overrightarrow{AB}(2;-3;1)$ et $\overrightarrow{AC}(2;-1;0)$ ne sont pas colinéaires (troisième coordonnée 1 et 0, alors que la première est identique), donc ils dirigent le plan (ABC). $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2-6+4=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2-2+0=0$. $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : $\vec{n}(1;2;4)$ **est normal au plan** (ABC).

2. b) Le plan (ABC) a donc une équation de la forme $x+2y+4z+k=0$. Il passe par $A(-1;2;1)$: $-1+4+4+k=0$, soit $k=-7$. (ABC) **:** $x+2y+4z-7=0$**.** (Contrôle : B : $1-2+8-7=0$; C : $1+2+4-7=0$.)

2. c) $-\frac{1}{2}+2\times1+4\times4-7=-\frac{1}{2}+2+16-7=\frac{21}{2}\neq0$, donc $S\notin(ABC)$. **Les points** A**,** B**,** C**,** S **ne sont pas coplanaires.**

3. a) D'une part $H\in(ABC)$: $-1+0+8-7=0$. D'autre part $\overrightarrow{SH}\left(-\frac{1}{2};-1;-2\right)=-\frac{1}{2}\vec{n}$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}$, donc la droite (SH) est orthogonale au plan (ABC). H **est le projeté orthogonal de** S **sur** (ABC)**.**

3. b) $SH=\left\|-\frac{1}{2}\vec{n}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{1+4+16}=\frac{\sqrt{21}}{2}$. Soit M un point du plan (ABC). Le vecteur $\overrightarrow{HM}$ est dans le plan, donc orthogonal à $\overrightarrow{SH}$; d'après le théorème de Pythagore dans le triangle SHM rectangle en H : $SM^2=SH^2+HM^2\geqslant SH^2$, donc $SM\geqslant SH=\frac{\sqrt{21}}{2}$. **Aucun point** M **du plan ne vérifie** $SM<\frac{\sqrt{21}}{2}$ (la distance de S au plan est $\frac{\sqrt{21}}{2}$).

Partie B

1. $\overrightarrow{CS}\left(-\frac{3}{2};0;3\right)$, donc $\overrightarrow{CM}=k\overrightarrow{CS}$ donne $M\left(1-\frac{3}{2}k;\ 1;\ 1+3k\right)$, $k\in[0;1]$.

2. Le triangle MAB est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ (avec $M\neq A$ et $M\neq B$, ce qui est le cas car A et B n'ont pas pour ordonnée 1).

$\overrightarrow{MA}\left(-2+\frac{3}{2}k;\ 1;\ -3k\right)$ et $\overrightarrow{MB}\left(\frac{3}{2}k;\ -2;\ 1-3k\right)$.

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(-2+\frac{3}{2}k\right)\frac{3}{2}k-2-3k(1-3k)=-3k+\frac{9}{4}k^2-2-3k+9k^2=\frac{45}{4}k^2-6k-2$.

On résout $\frac{45}{4}k^2 - 6k - 2 = 0$, soit $45k^2 - 24k - 8 = 0$: $\Delta = 24^2 + 4 \times 45 \times 8 = 576 + 1440 = 2016 = 144 \times 14$, $\sqrt{\Delta} = 12\sqrt{14}$. Les solutions sont $k_1 = \dfrac{24 - 12\sqrt{14}}{90} = \dfrac{4 - 2\sqrt{14}}{15} \approx -0{,}23$ et $k_2 = \dfrac{4 + 2\sqrt{14}}{15} \approx 0{,}77$.

Seule k_2 appartient à $[0;1]$. **Oui : il existe exactement un point M du segment $[CS]$ tel que MAB soit rectangle en M, obtenu pour $k = \dfrac{4 + 2\sqrt{14}}{15} \approx 0{,}77$**, soit $M\left(1 - \dfrac{3}{2}k_2 ; 1 ; 1 + 3k_2\right) \approx (-0{,}15 ; 1 ; 3{,}30)$.

Exercice 3 – Vrai ou faux : suites, convexité et inégalité logarithmique *(4 pts)*

Affirmation 1 : FAUSSE. Attention, les exposants : $u_n = \dfrac{1 + 5^n}{2 + 3^n}$. On factorise par les termes dominants : $u_n = \dfrac{5^n\left(\frac{1}{5^n} + 1\right)}{3^n\left(\frac{2}{3^n} + 1\right)} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^n \times \dfrac{\frac{1}{5^n} + 1}{\frac{2}{3^n} + 1}$. Comme $5 > 1$ et $3 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$, donc $\dfrac{1}{5^n} \to 0$ et $\dfrac{2}{3^n} \to 0$: le quotient $\dfrac{\frac{1}{5^n} + 1}{\frac{2}{3^n} + 1}$ tend vers 1. De plus $\dfrac{5}{3} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{3}\right)^n = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **: la suite diverge, elle ne converge pas vers $\dfrac{5}{3}$.**

Affirmation 2 : VRAIE. Montrons par récurrence que $w_n \geqslant n$ pour tout entier naturel n. *Initialisation* : $w_0 = 0 \geqslant 0$. *Hérédité* : soit n tel que $w_n \geqslant n$; alors $w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3 = n + 3 \geqslant n + 1$. *Conclusion* : **pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geqslant n$.** (Vérification : $w_1 = 3$, $w_2 = 10$, $w_3 = 29$.)

Affirmation 3 : FAUSSE. Une fonction convexe sur un intervalle a sa courbe entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes sur cet intervalle. Or, sur la figure, entre les abscisses 3 et 8, la courbe C_f est **en dessous** de sa tangente T au point A d'abscisse 8. **f n'est donc pas convexe sur $]0;+\infty[$** (elle l'est seulement sur une partie de son ensemble de définition, autour du point d'abscisse 1 où la courbe est au-dessus de sa tangente horizontale).

Affirmation 4 : VRAIE. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln x - x + 1$. Elle est dérivable et $g'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1 - x}{x}$, du signe de $1 - x$: g est croissante sur $]0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$. Elle admet donc un maximum en $x = 1$, égal à $g(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$. Par conséquent, **pour tout $x > 0$, $\ln x - x + 1 \leqslant 0$.** (Autre justification : ln est concave, donc sa courbe est en dessous de sa tangente en 1, d'équation $y = x - 1$.)

Exercice 4 – Équation différentielle et fonction exponentielle : freinage d'un chariot *(6 pts)*

Partie A (lectures graphiques, sans justification ; le modèle des parties B et C confirme ces valeurs).

1. On lit l'abscisse du point de C_d d'ordonnée 15 : **le chariot a parcouru** 15 **m au bout d'environ** 2 **secondes**.

2. La distance parcourue tend vers l'ordonnée de l'asymptote Δ, soit environ 23 m ($\dfrac{205}{9} \approx 22{,}8$ m) : **il faut prévoir une zone de freinage d'au moins** 23 **m**.

3. $d'(4{,}7)$ est le coefficient directeur de la tangente T au point A d'abscisse $4{,}7$; on lit $d'(4{,}7) \approx 1$. Comme d' est la vitesse instantanée, cela signifie qu'à $t = 4{,}7$ s le chariot roule à environ 1 m/s.

Partie B

1. a) (E') s'écrit $y' = -0{,}6y$; ses solutions sont les fonctions $t \mapsto Ke^{-0{,}6t}$**,** $K \in \mathbb{R}$.

1. b) g est dérivable et $g'(t) = e^{-0{,}6t} + t \times (-0{,}6)e^{-0{,}6t} = (1 - 0{,}6t)e^{-0{,}6t}$. Alors $g'(t) + 0{,}6g(t) = (1 - 0{,}6t)e^{-0{,}6t} + 0{,}6te^{-0{,}6t} = e^{-0{,}6t}$. g **est solution de** (E)**.**

1. c) Les solutions de (E) sont les sommes de la solution particulière g et des solutions de l'équation homogène $(E') : t \mapsto te^{-0{,}6t} + Ke^{-0{,}6t} = (t + K)e^{-0{,}6t}$**, avec** $K \in \mathbb{R}$. (En effet, y est solution de (E) si et seulement si $y - g$ est solution de (E'), par linéarité.)

1. d) v est solution de (E), donc $v(t) = (t + K)e^{-0{,}6t}$, et $v(0) = 12$ impose $K \times e^0 = 12$, soit $K = 12$. $v(t) = (12 + t)e^{-0{,}6t}$ **pour tout** $t \geqslant 0$**.**

2. a) $v'(t) = 1 \times e^{-0{,}6t} + (12 + t) \times (-0{,}6)e^{-0{,}6t} = (1 - 7{,}2 - 0{,}6t)e^{-0{,}6t}$. $v'(t) = (-6{,}2 - 0{,}6t)e^{-0{,}6t}$**.**

2. b) $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0{,}6t} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} 12e^{-0{,}6t} = 0$. En posant $X = 0{,}6t$, qui tend vers $+\infty$, $\dfrac{0{,}6t}{e^{0{,}6t}} = \dfrac{X}{e^X}$ tend vers 0 par croissances comparées. Par somme, $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 0$: la vitesse du chariot tend vers 0.

2. c) Pour $t \geqslant 0$, $-6{,}2 - 0{,}6t < 0$ et $e^{-0{,}6t} > 0$, donc $v'(t) < 0$. v **est strictement décroissante sur** $[0 ; +\infty[$, de $v(0) = 12$ vers sa limite 0.

t	0		$+\infty$
$v'(t)$		$-$	
$v(t)$	12	décroissante	0

2. d) v est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$, avec $v(0) = 12 > 1$ et $\lim\limits_{+\infty} v = 0 < 1$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation** $v(t) = 1$ **admet une unique solution** α **sur** $[0 ; +\infty[$. À la calculatrice, $v(4{,}6) \approx 1{,}05 > 1$ et $v(4{,}7) \approx 0{,}995 < 1$, donc $4{,}6 < \alpha < 4{,}7$ et $\alpha \approx 4{,}7$ (au dixième ; $\alpha \approx 4{,}69$).

3. Le système se déclenche dès que $v(t) \leqslant 1$. Comme v est strictement décroissante et $v(\alpha) = 1$: $v(t) \leqslant 1 \iff t \geqslant \alpha$. **Le système entre en action au bout d'environ** $4{,}7$ **secondes.**

Partie C

1. $d(t) = \displaystyle\int_0^t (12 + x)e^{-0{,}6x}\,dx$. On pose $u(x) = 12 + x$ et $w'(x) = e^{-0{,}6x}$, d'où $u'(x) = 1$ et $w(x) = -\dfrac{1}{0{,}6}e^{-0{,}6x} = -\dfrac{5}{3}e^{-0{,}6x}$ (fonctions dérivables à dérivées continues). Par intégration par parties :

$$d(t) = \left[-\frac{5}{3}(12+x)e^{-0{,}6x}\right]_0^t + \frac{5}{3}\int_0^t e^{-0{,}6x}\,dx = -\frac{5}{3}(12+t)e^{-0{,}6t} + \frac{5}{3}\times 12 + \frac{5}{3}\left[-\frac{5}{3}e^{-0{,}6x}\right]_0^t$$

$$d(t) = -\frac{5}{3}(12+t)e^{-0{,}6t} + 20 - \frac{25}{9}e^{-0{,}6t} + \frac{25}{9} = e^{-0{,}6t}\left(-\frac{5}{3}t - 20 - \frac{25}{9}\right) + 20 + \frac{25}{9}.$$

Comme $20 = \dfrac{180}{9}$, on obtient $d(t) = e^{-0{,}6t}\left(-\dfrac{5}{3}t - \dfrac{205}{9}\right) + \dfrac{205}{9}$.

2. Le dispositif se déclenche à l'instant α (question B.3). La distance parcourue est $d(\alpha)$ avec $\alpha \approx 4{,}69$: $d(\alpha) \approx e^{-0{,}6\alpha}\left(-\dfrac{5}{3}\alpha - \dfrac{205}{9}\right) + \dfrac{205}{9} \approx 20{,}94$. **Le chariot parcourt environ $20{,}94$ m avant le déclenchement du dispositif** (avec la valeur arrondie $\alpha \approx 4{,}7$, on trouve $d(4{,}7) \approx 20{,}95$ m ; l'ordre de grandeur, un peu moins de 21 m, est cohérent avec la lecture graphique de la partie A).

Conseils pour le jour J

Exercice 1 : la question A.4 demande une probabilité conditionnelle « à rebours » ($P_{\bar{B}}(\bar{A})$) ; écris la définition avant de calculer, et donne le résultat arrondi au millième comme demandé. En partie B, l'indépendance est l'hypothèse qui autorise $V(T_1+T_2) = V(T_1) + V(T_2)$: cite-la. Exercice 2 : la question B.2 est la plus longue (produit scalaire en fonction de k puis trinôme) ; pose proprement les coordonnées de $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ et n'oublie pas de vérifier que la solution est bien dans $[0;1]$. Exercice 3 : dans l'affirmation 1, lis bien les exposants (5^n et 3^n, pas $5n$ et $3n$) : factorise par 5^n et 3^n ; pour l'affirmation 3, la réponse tient en une phrase à condition de rappeler le critère « courbe au-dessus de ses tangentes » ; pour l'affirmation 4, l'étude de la fonction auxiliaire $x \mapsto \ln x - x + 1$ est la méthode attendue. Exercice 4 : les résultats des parties B et C doivent être cohérents avec les lectures graphiques de la partie A ($\alpha \approx 4{,}7$, $d'(4{,}7) \approx 1$, asymptote vers 22,8 m) : utilise cette cohérence pour te contrôler. Prévois 70 minutes pour cet exercice à 6 points.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).