Corrigé – Bac 2025 – spécialité mathématiques – Métropole, jour 1

Probabilités conditionnelles, loi binomiale et inégalité de concentration, Étude d'une fonction logarithme, convexité et calcul d'aire, Vrai ou faux : géométrie dans l'espace, Suite récurrente et équation différentielle logistique : posidonie

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Probabilités conditionnelles, loi binomiale et inégalité de concentration *(5 pts)*

1. Premier niveau de l'arbre : $P(A) = 0{,}45$, $P(B) = 0{,}10$, $P(AB) = 0{,}03$ et $P(O) = 1 - 0{,}45 - 0{,}10 - 0{,}03 = 0{,}42$. Second niveau : après A, $P_A(R) = 0{,}85$ et $P_A(\bar{R}) = 0{,}15$; après B, $P_B(R) = 0{,}84$ et $P_B(\bar{R}) = 0{,}16$; après AB, $P_{AB}(R) = 0{,}82$ et $P_{AB}(\bar{R}) = 0{,}18$. Les deux branches issues de O ne sont pas données par l'énoncé (elles sont déterminées à la question 3 : 0,83 et 0,17).

2. $P(B \cap R) = P(B) \times P_B(R) = 0{,}10 \times 0{,}84 = 0{,}084$. $P(B \cap R) = 0{,}084$: 8,4 % des individus sont du groupe B *et* de rhésus positif.

3. A, B, AB, O forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(AB \cap R) + P(O \cap R) = 0{,}45 \times 0{,}85 + 0{,}084 + 0{,}03 \times 0{,}82 + 0{,}42\,P_O(R)$$

.

Soit $0{,}8397 = 0{,}3825 + 0{,}084 + 0{,}0246 + 0{,}42\,P_O(R) = 0{,}4911 + 0{,}42\,P_O(R)$, d'où $P_O(R) = \dfrac{0{,}8397 - 0{,}4911}{0{,}42} = \dfrac{0{,}3486}{0{,}42} = 0{,}83$. **$P_O(R) = 0{,}83$.**

4. Un donneur universel est de groupe O et de rhésus négatif : $P(O \cap \bar{R}) = P(O) \times P_O(\bar{R}) = 0{,}42 \times (1 - 0{,}83) = 0{,}42 \times 0{,}17 = 0{,}0714$. **La probabilité d'être donneur universel est $0{,}0714$.**

5. a) On répète 100 fois de façon identique et indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise) une épreuve de Bernoulli de succès « la personne est donneur universel », de probabilité 0,0714, et X compte les succès. **X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100 ; 0{,}0714)$.**

5. b) À la calculatrice : $P(X \leqslant 7) \approx 0{,}577$. **La probabilité d'avoir au plus 7 donneurs universels est environ $0{,}577$.**

5. c) Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$, $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$. Ici $E(X) = 100 \times 0{,}0714 = 7{,}14$ et $V(X) = 100 \times 0{,}0714 \times 0{,}9286 = 6{,}630204 \approx 6{,}63$. **$E(X) = 7{,}14$ et $V(X) \approx 6{,}63$.**

6. a) M_N est **la moyenne des nombres de donneurs universels** observés dans les N échantillons de 100 personnes (un par ville) : le nombre moyen de donneurs universels par échantillon.

6. b) Par linéarité de l'espérance : $E(M_N) = \dfrac{1}{N}\left(E(X_1) + \cdots + E(X_N)\right) = \dfrac{1}{N} \times N \times 7{,}14$. **$E(M_N) = 7{,}14$.**

6. c) Les variables $X_1, \ldots, X_N$ sont indépendantes, donc la variance de leur somme est la somme des variances : $V(X_1 + \cdots + X_N) = N \times 6{,}63$. De plus $V(aY) = a^2 V(Y)$, donc $V(M_N) = \dfrac{1}{N^2} \times N \times 6{,}63$. $V(M_N) = \dfrac{6{,}63}{N}$

.

6. d) L'événement $\{7

$P(|M_N - 7{,}14| \geqslant 0{,}14) \leqslant \dfrac{V(M_N)}{0{,}14^2} = \dfrac{6{,}63}{0{,}0196\,N}$, donc $P(7

Il suffit donc que $1 - \dfrac{6{,}63}{0{,}0196\,N} \geqslant 0{,}95$, soit $\dfrac{6{,}63}{0{,}0196\,N} \leqslant 0{,}05$, soit $N \geqslant \dfrac{6{,}63}{0{,}0196 \times 0{,}05} = \dfrac{6{,}63}{0{,}00098} \approx 6765{,}3$.

La plus petite valeur est $N = 6766$.

Exercice 2 – Étude d'une fonction logarithme, convexité et calcul d'aire *(6 pts)*

Partie A : lectures graphiques

1. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A, qui passe par $A(1;2)$ et $C(3;0)$: $f'(1) = \dfrac{0-2}{3-1} = -1$.
$f'(1) = -1$.

2. $f'(x) = 0$ correspond aux points où la tangente à C_f est horizontale. Sur le graphique, la courbe admet un maximum local (vers $x \approx 0{,}4$) puis un minimum local (vers $x \approx 1{,}6$) : **l'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions dans** $]0;3]$. (On le confirme en partie B : $f'(x) = 0 \iff \ln x = -1$ ou $\ln x = \dfrac{1}{2}$, soit $x = e^{-1} \approx 0{,}37$ ou $x = \sqrt{e} \approx 1{,}65$.)

3. Au voisinage de $x = 0{,}2$, la courbe est située en dessous de ses tangentes (elle « tourne » vers le bas en montant vers son maximum local) : f est concave sur cette zone, donc $f''(0{,}2) < 0$. (Confirmation par la partie B : $f''(0{,}2) = \dfrac{4\ln(0{,}2)+1}{0{,}2} < 0$ car $\ln(0{,}2) < 0$.)

Partie B : étude de la fonction

1. Le discriminant de $2X^2 - 3X + 2$ est $\Delta = (-3)^2 - 4\times 2\times 2 = 9 - 16 = -7 < 0$: **l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$ n'a pas de solution réelle**, et le trinôme est strictement positif (signe du coefficient dominant 2).

En posant $X = \ln x$, on obtient $2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 > 0$ pour tout $x > 0$; comme $x > 0$, $f(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$. **f ne s'annule jamais : C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.**

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. Posons $X = \ln x$; $2X^2 - 3X + 2 = X^2\left(2 - \dfrac{3}{X} + \dfrac{2}{X^2}\right)$ tend vers $+\infty$ quand $X \to +\infty$. Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. a) $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$. La dérivée de $(\ln x)^2$ est $2\ln x \times \dfrac{1}{x}$ (dérivée de u^2 : $2u'u$). Donc $f''(x) = 2 \times 2\ln x \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{4\ln x + 1}{x}$. **$f''(x) = \dfrac{1}{x}(4\ln x + 1)$.**

3. b) Sur $]0;+\infty[$, $\dfrac{1}{x} > 0$ donc $f''(x)$ a le signe de $4\ln x + 1$: $4\ln x + 1 \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant -\dfrac{1}{4} \iff x \geqslant e^{-1/4}$ (croissance de la fonction exponentielle).

f est concave sur $\left]0; e^{-1/4}\right]$ et convexe sur $\left[e^{-1/4}; +\infty\right[$; f'' s'annule en changeant de signe en $x = e^{-1/4} \approx 0{,}78$, abscisse du point d'inflexion.

3. c) Comme $e^{-1/4} < 1$, f est convexe sur $[1;+\infty[$. Or une fonction convexe sur un intervalle a sa courbe au-dessus de chacune de ses tangentes en tout point de cet intervalle. Le point B a pour abscisse $e \in [1;+\infty[$, donc **C_f est au-dessus de T_B sur** $[1;+\infty[$.

Partie C : calcul d'aire

1. $f'(e) = 2(\ln e)^2 + \ln e - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$ et $f(e) = e$. La tangente en B a pour équation $y = f'(e)(x - e) + f(e) = 2(x-e) + e$, soit $y = 2x - e$.

2. On pose $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$; ces fonctions sont dérivables à dérivées continues sur $[1;e]$. Par intégration par parties :

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,dx = \frac{e^2}{2} - 0 - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

$\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{e^2+1}{4}$**.**

3. Sur $[1;e]$, C_f est au-dessus de T_B (question B.3.c), et les fonctions sont continues. L'aire cherchée est donc :

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^e \left(f(x) - (2x-e)\right)dx = \int_1^e \left(2x(\ln x)^2 - 3x\ln x + 2x - 2x + e\right)dx = 2\int_1^e x(\ln x)^2\,dx - 3\int_1^e x\ln x\,dx + \int_1^e e\,dx.$

$\mathcal{A} = 2\times\dfrac{e^2-1}{4} - 3\times\dfrac{e^2+1}{4} + e(e-1) = \dfrac{2e^2-2-3e^2-3}{4} + e^2 - e = \dfrac{-e^2-5+4e^2-4e}{4}.$

$\mathcal{A} = \dfrac{3e^2-4e-5}{4} \approx 1{,}57$ **unité d'aire.**

Exercice 3 – Vrai ou faux : géométrie dans l'espace *(4 pts)*

Affirmation 1 : VRAIE. $\overrightarrow{AB}(4;2;-6)$. Le vecteur directeur $\vec{u}(-2;-1;3)$ de la représentation proposée vérifie $\overrightarrow{AB} = -2\vec{u}$: il dirige bien la droite (AB). De plus, pour $t=0$, on obtient le point $(3;2;-1) = B$, qui appartient à (AB). **La représentation paramétrique proposée est bien celle de** (AB)**.**

Affirmation 2 : FAUSSE. $\vec{n}$ est normal au plan (OAB) si et seulement s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan, par exemple $\overrightarrow{OA}(-1;0;5)$ et $\overrightarrow{OB}(3;2;-1)$. Or $\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA} = -5+0+5 = 0$ mais $\vec{n}\cdot\overrightarrow{OB} = 15-4-1 = 10 \neq 0$. $\vec{n}$ **n'est pas normal au plan** (OAB)**.**

Affirmation 3 : FAUSSE. d a pour vecteur directeur $\vec{u}(1;-1;2)$ et d' a pour vecteur directeur $\vec{v}(4;4;-6)$, non colinéaires. Cherchons un point commun : $15+k = 1+4s$, $8-k = 2+4s$, $-6+2k = 1-6s$. En additionnant les deux premières équations : $23 = 3+8s$, soit $s = \dfrac{5}{2}$, puis $k = 4s-14 = -4$. Vérification dans la troisième : $-6+2\times(-4) = -14$ et $1-6\times\dfrac{5}{2} = -14$. Le système a une solution : **les droites sont sécantes au point** $(11;12;-14)$**, donc coplanaires**.

Affirmation 4 : VRAIE. $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}(1;-1;1)$. La distance de $C(2;-1;2)$ à $\mathcal{P}$ vaut $\dfrac{|2-(-1)+2+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$. **La distance est bien** $2\sqrt{3}$**.** (Sans la formule : le projeté $H = C + t\vec{n} = (2+t;-1-t;2+t)$ est dans $\mathcal{P}$ pour $2+t+1+t+2+t+1=0$, soit $t=-2$, et $CH = |t|\,\|\vec{n}\| = 2\sqrt{3}$.)

Exercice 4 – Suite récurrente et équation différentielle logistique : posidonie *(5 pts)*

Partie A : modèle discret

1. $u_1 = -0{,}02 \times 1^2 + 1{,}3 \times 1 = 1{,}28$. **Au 1er juillet 2025, la posidonie devrait recouvrir** $1{,}28$ **ha.**

2. a) On remarque que $u_{n+1} = h(u_n)$. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$ ».

Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1{,}28$, donc $1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 20$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit n tel que $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$. Comme h est croissante sur $[0;20]$, elle conserve l'ordre : $h(1) \leqslant h(u_n) \leqslant h(u_{n+1}) \leqslant h(20)$, soit $1{,}28 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 18$ (car $h(1) = 1{,}28$ et $h(20) = -8 + 26 = 18$). Comme $1 \leqslant 1{,}28$ et $18 \leqslant 20$, on obtient $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 20$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : **pour tout entier naturel** n**,** $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$**.**

2. b) D'après 2.a, la suite (u_n) est croissante et majorée par 20. D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) **converge** vers une limite L, avec $1 \leqslant L \leqslant 20$.

2. c) La fonction h est continue sur $[0;20]$ (fonction polynôme) et $u_{n+1} = h(u_n)$ avec $u_n \to L$; par passage à la limite, $L = h(L)$, soit $L = -0{,}02L^2 + 1{,}3L$, soit $0{,}02L^2 - 0{,}3L = 0$, soit $L(0{,}02L - 0{,}3) = 0$: $L = 0$ ou $L = 15$. Comme $L \geqslant 1$, $L = 15$.

3. a) La suite converge vers $15 > 14$: par définition de la limite, tout intervalle ouvert contenant 15, par exemple $]14;16[$, contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. **La surface dépassera donc** 14 **ha d'après ce modèle.**

3. b) On complète l'algorithme :

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1
    while u <= 14 :
        n = n + 1
        u = -0.02*u**2 + 1.3*u
    return n
```

Tant que la surface $u = u_n$ ne dépasse pas 14, on passe à l'année suivante (n augmente de 1) et on calcule la surface suivante avec la relation de récurrence. La fonction renvoie le premier entier n tel que $u_n > 14$, c'est-à-dire le nombre d'années après 2024 au bout duquel la surface dépasse 14 ha (on trouve $n = 18$, soit en 2042, avec $u_{18} \approx 14{,}12$).

Partie B : modèle continu

1. f est dérivable et ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$, donc $g = \dfrac{1}{f}$ est dérivable et $g' = -\dfrac{f'}{f^2}$. En utilisant (E_1) :

$$g'(t) = -\frac{0{,}02 f(t)(15 - f(t))}{f(t)^2} = -\frac{0{,}02(15 - f(t))}{f(t)} = -\frac{0{,}3}{f(t)} + 0{,}02 = -0{,}3\, g(t) + 0{,}02.$$

g **est solution de** (E_2) **:** $y' = -0{,}3y + 0{,}02$**.**

2. (E_2) est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}3$ et $b = 0{,}02$. Ses solutions sont les fonctions $t \mapsto Ke^{at} - \dfrac{b}{a}$, soit $t \mapsto Ke^{-0{,}3t} + \dfrac{1}{15}$**, avec** $K \in \mathbb{R}$ (car $-\dfrac{0{,}02}{-0{,}3} = \dfrac{2}{30} = \dfrac{1}{15}$).

3. g est de la forme $g(t) = Ke^{-0{,}3t} + \dfrac{1}{15}$ et $g(0) = \dfrac{1}{f(0)} = 1$, donc $K + \dfrac{1}{15} = 1$, $K = \dfrac{14}{15}$. Ainsi $g(t) = \dfrac{14e^{-0{,}3t} + 1}{15}$ et, comme $f = \dfrac{1}{g}$: $f(t) = \dfrac{15}{14e^{-0{,}3t} + 1}$ pour tout $t \geqslant 0$.

4. $\lim\limits_{t \to +\infty} (-0{,}3t) = -\infty$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0{,}3t} = 0$; le dénominateur tend vers 1 et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 15$. À long terme, la posidonie recouvrira 15 ha, comme dans le modèle discret.

5. Le dénominateur $14e^{-0{,}3t} + 1$ étant strictement positif :

$$f(t) > 14 \iff 15 > 14\left(14e^{-0{,}3t} + 1\right) \iff 15 > 196e^{-0{,}3t} + 14 \iff e^{-0{,}3t} < \frac{1}{196} \iff -0{,}3t < -\ln 196$$

(la fonction ln est strictement croissante) $\iff t > \dfrac{\ln 196}{0{,}3}$.

Or $\dfrac{\ln 196}{0{,}3} \approx 17{,}6$. **L'ensemble des solutions est** $\left]\dfrac{\ln 196}{0{,}3}; +\infty\right[$: d'après le modèle continu, la surface recouverte dépasse 14 ha au bout d'environ 17,6 ans après le 1er juillet 2024, c'est-à-dire au début de l'année 2042, ce qui est cohérent avec le modèle discret ($n = 18$).

Conseils pour le jour J

Exercice 1 : la question 6.d est le point délicat du sujet ; il faut d'abord réécrire $7

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).