

Corrigé – Bac 2025 – spécialité mathématiques – Amérique du Nord, jour 2

Étude d'une fonction exponentielle, convexité et calcul d'aire, Vrai ou faux : géométrie dans l'espace,
Probabilités conditionnelles et loi binomiale : contamination et vaccination, Suite récurrente d'ordre deux
et suite auxiliaire géométrique

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Étude d'une fonction exponentielle, convexité et calcul d'aire (5 pts)

La fonction étudiée est $f(x) = xe^{-x} + 2x - 1$ (cohérente avec la dérivée seconde donnée).

Partie A

1. $En -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$; de plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

$En +\infty$: $xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$ et, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$; comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $x \mapsto xe^{-x}$ est un produit uv avec $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$. Donc $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} + 2$, soit $f'(x) = (1 - x)e^{-x} + 2$.

3. On dérive f' : $f''(x) = -e^{-x} + (1 - x) \times (-e^{-x}) = (-1 - 1 + x)e^{-x}$, soit $f''(x) = (x - 2)e^{-x}$.

4. Comme $e^{-x} > 0$, $f''(x)$ a le signe de $x - 2$: $f''(x) \leq 0$ pour $x \leq 2$ et $f''(x) \geq 0$ pour $x \geq 2$. **f est concave sur $] -\infty; 2]$, convexe sur $[2; +\infty[$** , et la courbe admet un point d'inflexion au point d'abscisse 2, d'ordonnée $f(2) = 2e^{-2} + 3$.

5. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f'' . D'après la question 4, $f'' < 0$ sur $] -\infty; 2[$ et $f'' > 0$ sur $]2; +\infty[$: **f' est strictement décroissante sur $] -\infty; 2]$ et strictement croissante sur $[2; +\infty[$** . Elle admet un minimum en $x = 2$: $f'(2) = (1 - 2)e^{-2} + 2 = 2 - e^{-2} = 2 - \frac{1}{e^2}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f'(x)$		décroissante	$2 - e^{-2}$	croissante	

6. Le minimum de f' sur $\mathbb{R}$ est $2 - e^{-2} \approx 1,86 > 0$ (car $e^{-2} < 1 < 2$). Donc pour tout réel x , $f'(x) \geq 2 - e^{-2} > 0$: **f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$** , et par conséquent **f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$** .

7. f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), **l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$** .

À la calculatrice : $f(0,37) \approx -0,004 < 0$ et $f(0,38) \approx 0,020 > 0$, donc $0,37 < \alpha < 0,38$.

8. Pour tout réel x , $f(x) - (2x - 1) = xe^{-x}$, qui a le signe de x puisque $e^{-x} > 0$. **Sur $] -\infty; 0[$, C_f est en dessous de Δ ; sur $]0; +\infty[$, C_f est au-dessus de Δ ; les deux se coupent au point $(0; -1)$.**

Partie B

1. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$, d'où $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$; u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[1; n]$. Par intégration par parties :

$$I_n = [-xe^{-x}]_1^n - \int_1^n (-e^{-x}) dx = -ne^{-n} + e^{-1} + [-e^{-x}]_1^n = -ne^{-n} + e^{-1} - e^{-n} + e^{-1}.$$

$$I_n = \frac{2}{e} - (n+1)e^{-n}.$$

2. a) Sur $[1; n]$, on a $x > 0$ donc $f(x) - (2x - 1) = xe^{-x} \geq 0$: la courbe C_f est au-dessus de Δ . Les fonctions étant continues, l'aire du domaine compris entre les deux courbes et les droites $x = 1$, $x = n$ est

$$\int_1^n (f(x) - (2x - 1)) dx = \int_1^n x e^{-x} dx = I_n. \text{ L'aire de } D_n \text{ est } I_n \text{ (en unités d'aire).}$$

2. b) $(n+1)e^{-n} = \frac{n+1}{e^n} = \frac{n}{e^n} + \frac{1}{e^n}$. Par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{2}{e} \approx 0,74$: l'aire du domaine D_n tend vers $\frac{2}{e}$ unités d'aire.

Exercice 2 – Vrai ou faux : géométrie dans l'espace

(5 pts)

La droite D passe par le point $M_0(3; -2; 1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1; 3; 4)$; le plan P a pour vecteur normal $\vec{n}(2; -3; 1)$.

1. VRAIE. La droite D' a pour vecteur directeur $\vec{u}'(2; -6; -8) = -2\vec{u}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires, donc D et D' sont parallèles. (Elles sont même strictement parallèles : le point $(2; 4; 9)$ de D' n'est pas sur D puisque $3 - t = 2$ impose $t = 1$, ce qui donne $y = 1 \neq 4$.)

2. FAUSSE. $\overrightarrow{AB}(3; 0; -5)$ et $\overrightarrow{AC}(8; 0; 8)$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) . D est orthogonale au plan (ABC) si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à ces deux vecteurs. Or $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 \times 3 + 3 \times 0 + 4 \times (-5) = -23 \neq 0$. Donc D n'est pas orthogonale au plan (ABC) . (On peut aussi remarquer que (ABC) est le plan $y = 3$, de vecteur normal $\vec{j}$, non colinéaire à $\vec{u}$.)

3. FAUSSE. Δ a pour vecteur directeur $\vec{v}(2; -3; 1)$, non colinéaire à $\vec{u}$ (car $\frac{2}{-1} \neq \frac{-3}{3}$) : les droites ne sont pas parallèles. Cherchons un point commun en résolvant le système :

$$3 - t = -4 + 2t', -2 + 3t = 1 - 3t', 1 + 4t = 2 + t'.$$

La première équation donne $t = 7 - 2t'$; en reportant dans la deuxième : $-2 + 21 - 6t' = 1 - 3t'$, soit $3t' = 18$, $t' = 6$ et $t = -5$. Vérification dans la troisième : $1 + 4 \times (-5) = -19$ et $2 + 6 = 8$; $-19 \neq 8$, le système n'a pas de solution. D et Δ ne sont pas sécantes (elles sont non coplanaires).

4. VRAIE. D'une part $\overrightarrow{EF}(2; -3; 1) = \vec{n}$ est normal à P , donc la droite (EF) est orthogonale à P . D'autre part $F \in P$: $2 \times (-3) - 3 \times (-3) + 3 - 6 = -6 + 9 + 3 - 6 = 0$. F est donc bien le projeté orthogonal de E sur P .

5. VRAIE. P' a pour vecteur normal $\vec{n}'(-3; 1; -a)$. P' est parallèle à D si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}'$: $\vec{u} \cdot \vec{n}' = (-1)(-3) + 3 \times 1 + 4 \times (-a) = 6 - 4a$. Donc $P' \parallel D \iff 6 - 4a = 0 \iff a = \frac{3}{2}$. Il existe exactement une valeur, $a = \frac{3}{2}$. (Pour cette valeur, $M_0 \notin P'$ car $-9 - 2 - \frac{3}{2} + 3 \neq 0$: D est strictement parallèle à P' .)

Exercice 3 – Probabilités conditionnelles et loi binomiale : contamination et vaccination (5 pts)

Les résultats sont arrondis à 10^{-4} près.

1. D'après l'énoncé : $P(C) = 0,02$, $P(V) = 0,9$ et, comme 62 % des personnes contaminées étaient vaccinées, $P_C(V) = 0,62$.

2. a) $P(C \cap V) = P(C) \times P_C(V) = 0,02 \times 0,62$. $P(C \cap V) = 0,0124$.

2. b) C et $\bar{C}$ forment une partition, donc $P(V) = P(C \cap V) + P(\bar{C} \cap V)$, d'où $P(\bar{C} \cap V) = 0,9 - 0,0124$. $P(\bar{C} \cap V) = 0,8876$.

3. L'arbre commence par $C / \bar{C}$ puis $V / \bar{V}$. Premier niveau : $P(C) = 0,02$ et $P(\bar{C}) = 0,98$. Branche C : $P_C(V) = 0,62$ et $P_C(\bar{V}) = 0,38$. Branche $\bar{C}$: $P_{\bar{C}}(V) = \frac{P(\bar{C} \cap V)}{P(\bar{C})} = \frac{0,8876}{0,98} \approx 0,9057$ et $P_{\bar{C}}(\bar{V}) = 1 - P_{\bar{C}}(V) \approx 0,0943$.

4. $P_V(C) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{0,0124}{0,9} \approx 0,0138$. Parmi les personnes vaccinées, environ 1,38 % ont été contaminées.

5. a) **FAUSSE**. Parmi les personnes non contaminées, la proportion de vaccinées est $P_{\bar{C}}(V) \approx 0,9057$ et celle de non vaccinées $P_{\bar{C}}(\bar{V}) \approx 0,0943$. Le rapport vaut $\frac{0,8876}{0,98 - 0,8876} = \frac{0,8876}{0,0924} \approx 9,6 < 10$. Il y a environ 9,6 fois plus de vaccinés que de non vaccinés, **pas dix fois plus**.

5. b) **VRAIE**. $P_V(\bar{C}) = 1 - P_V(C) = 1 - \frac{0,0124}{0,9} \approx 0,9862 > 0,98$. Plus de 98 % des personnes vaccinées n'ont pas été contaminées.

6. a) On répète 20 fois, de façon identique et indépendante (tirages assimilés à des tirages avec remise), une épreuve de Bernoulli de succès « la personne est contaminée », de probabilité $p = 0,02$; X compte le nombre de succès. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,02)$.

6. b) Pour k entier entre 0 et 20, $P(X = k) = \binom{20}{k} 0,02^k 0,98^{20-k}$. Donc $P(X = 4) = \binom{20}{4} \times 0,02^4 \times 0,98^{16} = 4845 \times 0,02^4 \times 0,98^{16} \approx 0,0006$ (arrondi à 10^{-4} ; valeur plus précise $5,6 \times 10^{-4}$). $P(X = 4) \approx 0,0006$.

Exercice 4 – Suite récurrente d'ordre deux et suite auxiliaire géométrique (5 pts)

La suite est définie par $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

Partie A

$$1. u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2}; u_3 = u_2 - \frac{1}{4}u_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}; u_4 = u_3 - \frac{1}{4}u_2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}; u_5 = u_4 - \frac{1}{4}u_3 = \frac{1}{4} - \frac{3}{32} = \frac{5}{32}.$$

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{32}$

2. Les termes semblent décroître vers 0 : **on conjecture que** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Partie B

$$1. w_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - 0. w_0 = \frac{1}{2}.$$

2. Pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \right) = \frac{1}{2}w_n.$$

(w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = \frac{1}{2}$.

$$3. \text{ Pour tout entier naturel } n, w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ soit } w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

$$4. \text{ Par définition de } w_n : u_{n+1} = w_n + \frac{1}{2}u_n, \text{ donc } u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \text{ pour tout entier naturel } n.$$

$$5. \text{ Montrons par récurrence que pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Initialisation : $0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 = u_0$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$. D'après la question 4, $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. La propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : **pour tout** $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$. (Contrôle : $u_3 = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, $u_5 = \frac{5}{32}$, conformes au tableau.)

Partie C

$$1. \text{ Pour tout entier naturel } n : u_{n+1} - u_n = (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} [(n+1) - 2n] = (1-n) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Pour $n \geq 1$, $1 - n \leq 0$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. **La suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.**

2. Pour tout n , $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0$: la suite est minorée par 0. Une suite décroissante (à partir d'un certain rang) et minorée converge, d'après le théorème de convergence monotone. **(u_n) est convergente.**

3. La limite l vérifie $l = l - \frac{1}{4}l$, soit $\frac{1}{4}l = 0$, donc $l = 0$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, ce qui confirme la conjecture de la partie A.

Conseils pour le jour J

Exercice 1 : l'ordre des questions est un guide, respectez-le (le signe de f'' donne les variations de f' , dont le minimum $2 - e^{-2} > 0$ donne le signe de f') et citez explicitement le corollaire du TVI avec ses trois hypothèses (continuité, stricte monotonie, limites) en question 7. Pour l'intégration par parties, écrivez les quatre fonctions u, u', v, v' avant la formule : c'est ce que le barème vérifie. Exercice 2 : pour prouver qu'une affirmation est fausse, un seul calcul suffit (produit scalaire non nul, système incompatible), mais il doit être mené jusqu'au bout. Exercice 3 : attention à l'arrondi à 10^{-4} demandé dès le début, et distinguez soigneusement $P_C(V)$ (donnée) et $P_V(C)$ (à calculer) ; la formule de la loi binomiale doit être rappelée avec le coefficient binomial. Exercice 4 : la récurrence est très guidée, mais vérifiez vos formules sur les valeurs du tableau de la partie A avant de conclure, cela évite les erreurs de signe.