

Corrigé – Bac 2025 – spécialité mathématiques – Amérique du Nord, jour 1

Probabilités conditionnelles, loi binomiale et fréquence, Suite récurrente et suite auxiliaire associée, Vrai ou faux : géométrie dans l'espace, Équation différentielle et étude d'une fonction exponentielle avec aire

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Probabilités conditionnelles, loi binomiale et fréquence**(6 pts)****Partie A**

1. L'arbre a trois branches issues de la racine : A avec la probabilité 0,25, B avec 0,15 et C avec $1 - 0,25 - 0,15 = 0,6$. Sur la branche A : S avec 0,9 et $\bar{S}$ avec 0,1 ; sur la branche B : S avec 0,8 et $\bar{S}$ avec 0,2 ; sur la branche C : S avec 0,85 et $\bar{S}$ avec 0,15. Sur chaque nœud, la somme des probabilités vaut bien 1.

2. D'après la formule des probabilités composées, $P(B \cap S) = P(B) \times P_B(S) = 0,15 \times 0,8 = 0,12$. **La probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est 0,12.**

3. $P(C \cap \bar{S}) = P(C) \times P_C(\bar{S}) = 0,6 \times 0,15 = 0,09$. $P(C \cap \bar{S}) = 0,09$: il y a 9 % de chances qu'une connexion prise au hasard passe par le serveur C et soit instable.

4. Les événements A , B , C forment une partition de l'univers (une connexion passe par un et un seul serveur). D'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S) = 0,25 \times 0,9 + 0,12 + 0,6 \times 0,85 = 0,225 + 0,12 + 0,51 = 0,855.$$

On a bien $P(S) = 0,855$.

5. On cherche $P_S(B) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{0,12}{0,855} \approx 0,1404$. **Sachant que la connexion est stable, la probabilité qu'elle ait transité par le serveur B est environ 0,140 (arrondi au millièmes).**

Partie B

1. a) On répète 50 fois de façon indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise) la même épreuve de Bernoulli dont le succès « la connexion est instable » a pour probabilité 0,145 ; X compte le nombre de succès. **X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,145$.**

1. b) À la calculatrice (fonction de répartition de la loi binomiale) : $P(X \leq 8) \approx 0,704$. **La probabilité qu'au plus huit connexions soient instables est environ 0,704.**

2. a) L'événement contraire de « au moins une connexion instable » est « aucune connexion instable », c'est-à-dire $\{X_n = 0\}$. Or $P(X_n = 0) = \binom{n}{0} \times 0,145^0 \times 0,855^n = 0,855^n$. Donc $p_n = 1 - 0,855^n$.

2. b) On résout $p_n \geq 0,99$:

$$1 - 0,855^n \geq 0,99 \iff 0,855^n \leq 0,01 \iff n \ln(0,855) \leq \ln(0,01) \text{ (la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[).$$

$$\text{Comme } \ln(0,855) < 0, \text{ la division change le sens de l'inégalité : } n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)} \approx 29,4.$$

La plus petite valeur cherchée est $n = 30$. Vérification : $p_{29} = 1 - 0,855^{29} \approx 0,9894 < 0,99$ et $p_{30} = 1 - 0,855^{30} \approx 0,9909 \geq 0,99$.

3. a) Par linéarité de l'espérance, $E(F_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{n} \times n \times 0,145$. $E(F_n) = 0,145$.

3. b) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire F_n , d'espérance 0,145 et de variance $V(F_n)$, pour tout réel $\delta > 0$: $P(|F_n - 0,145| \geq \delta) \leq \frac{V(F_n)}{\delta^2}$.

Avec $\delta = 0,1$: $P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{0,123975}{n \times 0,01} = \frac{12,3975}{n} \leq \frac{12,5}{n}$ car $12,3975 \leq 12,5$. **L'inégalité est vérifiée.**

3. c) Pour $n = 1000$, en fonctionnement habituel, $P(|F_{1000} - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{12,5}{1000} = 0,0125$. Or la fréquence observée $F_{1000} = 0,3$ vérifie $|0,3 - 0,145| = 0,155 \geq 0,1$: un tel écart a une probabilité inférieure à 1,25 % si les serveurs fonctionnent normalement. **Le responsable a raison de soupçonner un dysfonctionnement** : l'observation est très improbable sous l'hypothèse d'un fonctionnement habituel.

Exercice 2 – Suite récurrente et suite auxiliaire associée

(5 pts)

1. $u_1 = \frac{2u_0 + 1}{u_0 + 2} = \frac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \frac{5}{4}$. $u_1 = \frac{5}{4} = 1,25$.

2. a) $a_0 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{2}{1} = 2$ et $a_1 = \frac{u_1}{u_1 - 1} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = 5$. $a_0 = 2$ et $a_1 = 5$.

2. b) Soit n un entier naturel. On calcule d'abord $u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1 = \frac{2u_n + 1 - u_n - 2}{u_n + 2} = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

Donc $a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \times \frac{u_n + 2}{u_n - 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}$.

D'autre part, $3a_n - 1 = \frac{3u_n}{u_n - 1} - 1 = \frac{3u_n - u_n + 1}{u_n - 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}$.

Pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

2. c) Remarque : l'hypothèse $a_n \geq 3^n - 1$ donne seulement $3a_n - 1 \geq 3^{n+1} - 4$, ce qui ne suffit pas à conclure directement ; on démontre donc par récurrence la propriété plus forte $\mathcal{P}(n)$: « $a_n \geq 3^n + 1$ », pour tout entier $n \geq 1$, qui entraîne l'inégalité demandée puisque $3^n + 1 \geq 3^n - 1$.

Initialisation : $a_1 = 5$ et $3^1 + 1 = 4$; on a $5 \geq 4$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que $a_n \geq 3^n + 1$. Alors $a_{n+1} = 3a_n - 1 \geq 3(3^n + 1) - 1 = 3^{n+1} + 2 \geq 3^{n+1} + 1$. Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 1$, $a_n \geq 3^n + 1$, et par conséquent $a_n \geq 3^n - 1$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

2. d) Comme $3 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3^n - 1) = +\infty$. Par le théorème de comparaison (minoration par une suite qui tend vers $+\infty$), $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

3. a) Soit n un entier naturel. Par définition $a_n(u_n - 1) = u_n$, soit $a_n u_n - a_n = u_n$, soit $u_n(a_n - 1) = a_n$. Or $a_n \neq 1$ (car $a_0 = 2$ et $a_n \geq 3^n - 1 \geq 2$ pour $n \geq 1$), donc $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$.

3. b) Pour tout n , $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}}$. Comme $a_n \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$, donc $1 - \frac{1}{a_n} \rightarrow 1$ et, par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

4. a) La variable u contient successivement $u_0 = 2$, puis $u_1, u_2, \dots$ (ligne 5, la relation de récurrence) et n compte le nombre de termes calculés. La boucle s'arrête dès que $u - 1 \leq p$. Comme (u_n) est décroissante et tend vers 1, la valeur n renvoyée est **le plus petit entier n tel que $u_n - 1 \leq p$** , c'est-à-dire le premier rang à partir duquel u_n est à une distance au plus p de sa limite 1 ; u est la valeur du terme u_n correspondant.

4. b) Pour $p = 0,001$, l'appel `algo(0.001)` renvoie $n = 6$ (on trouve $u_5 - 1 \approx 0,0027 > 0,001$ et $u_6 - 1 \approx 0,0009 \leq 0,001$).

Exercice 3 – Vrai ou faux : géométrie dans l'espace**(4 pts)**

Affirmation 1 : VRAIE. La droite (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(-2; 0; -6)$ et l'axe des ordonnées a pour vecteur directeur $\vec{j}(0; 1; 0)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires (la deuxième coordonnée de $\vec{u}$ est nulle, pas celle de $\vec{j}$), donc les droites ne sont pas parallèles. Elles ne sont pas sécantes non plus : tout point de (d) a pour ordonnée $y = -1$, et un point de (d) situé sur l'axe des ordonnées devrait vérifier $x = 0$ et $z = 0$, soit $3 - 2t = 0$ et $2 - 6t = 0$, c'est-à-dire $t = \frac{3}{2}$ et $t = \frac{1}{3}$, ce qui est impossible. Ni parallèles ni sécantes, **les deux droites sont non coplanaires.**

Affirmation 2 : VRAIE. Un plan orthogonal à (d) admet pour vecteur normal $\vec{u}(-2; 0; -6)$, ou plus simplement $\vec{n}(1; 0; 3)$ (colinéaire). Il a donc une équation de la forme $x + 3z + k = 0$. Il passe par $A(3; -3; -2)$: $3 + 3 \times (-2) + k = 0$, d'où $k = 3$. **Le plan a pour équation $x + 3z + 3 = 0$.**

Affirmation 3 : FAUSSE. Le point C de (d) d'abscisse 2 correspond à $3 - 2t = 2$, soit $t = \frac{1}{2}$:

$C(2; -1; 2 - 3) = C(2; -1; -1)$. On a $\vec{AB}(2; -1; 1)$ et $\vec{AC}(-1; 2; 1)$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 1 \times 1 = -3; AB = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}; AC = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}.$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}, \text{ donc } \widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3} \text{ et non } \frac{\pi}{6}.$$

Affirmation 4 : VRAIE. Le plan $\mathcal{P} : x + 3z - 7 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}(1; 0; 3)$. La distance de $B(5; -4; -1)$ à $\mathcal{P}$ est $BH = \frac{|5 + 3 \times (-1) - 7|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Si l'on ne connaît pas la formule de la distance : $H = B + t\vec{n} = (5 + t; -4; -1 + 3t)$ appartient à $\mathcal{P}$ pour $5 + t + 3(-1 + 3t) - 7 = 0$, soit $10t = 5$, $t = \frac{1}{2}$; alors $BH = |t| \|\vec{n}\| = \frac{1}{2}\sqrt{10}$. $BH = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Exercice 4 – Équation différentielle et étude d'une fonction exponentielle (5 pts) avec aire

Partie A

1. La courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des abscisses en -2 et 1 en changeant de signe (positive entre -2 et 1 , négative ailleurs, d'après la figure), et c'est précisément en $x = -2$ et $x = 1$ que la courbe $\mathcal{C}_1$ admet des extremums locaux (un minimum en -2 , un maximum en 1), $\mathcal{C}_1$ étant croissante là où $\mathcal{C}_2$ est positive et décroissante là où $\mathcal{C}_2$ est négative. Le signe de la dérivée donne les variations de la fonction : $\mathcal{C}_1$ représente g et $\mathcal{C}_2$ représente g' . (L'association inverse est impossible : $\mathcal{C}_1$ change de sens de variation en -2 et en 1 alors que $\mathcal{C}_2$ ne s'annule pas en ces points de la même manière ; on suppose ici la figure conforme à cette description, cohérente avec la partie B.)

2. La tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0 a pour équation $y = g'(0)(x - 0) + g(0)$. Or $g(0) = 1$ ($\mathcal{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées en $(0; 1)$) et $g'(0) = 2$ ($\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées en $(0; 2)$). **La tangente a pour équation réduite $y = 2x + 1$.**

Partie B

1. f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, et $f'_0(x) = (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x) \times (-e^{-x}) = (2x + 3 - x^2 - 3x)e^{-x}$.

Alors $f_0(x) + f'_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x} + (2x + 3 - x^2 - 3x)e^{-x} = (2x + 3)e^{-x}$. **f_0 est bien une solution particulière de (E) .**

2. (E_0) s'écrit $y' = -y$. D'après le cours, les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ke^{ax}$, $K \in \mathbb{R}$. **Les solutions de (E_0) sont les fonctions $x \mapsto Ke^{-x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.**

3. Les solutions de l'équation avec second membre (E) sont les sommes d'une solution particulière de (E) et des solutions de l'équation homogène (E_0) . **Les solutions de (E) sont les fonctions $f_K : x \mapsto (x^2 + 3x)e^{-x} + Ke^{-x} = (x^2 + 3x + K)e^{-x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.**

(Justification : si f est solution de (E) , alors $(f - f_0) + (f - f_0)' = (2x + 3)e^{-x} - (2x + 3)e^{-x} = 0$, donc $f - f_0$ est solution de (E_0) ; réciproquement, $f_0 + Ke^{-x}$ vérifie (E) par linéarité.)

4. g est de la forme $g(x) = (x^2 + 3x + K)e^{-x}$ et $g(0) = 1$ d'après la partie A, soit $K \times e^0 = 1$, donc $K = 1$. $g(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$. Contrôle : $g'(x) = (-x^2 - x + 2)e^{-x} = -(x + 2)(x - 1)e^{-x}$, qui s'annule bien en -2 et 1 et vaut 2 en 0 .

5. Soit $K \in \mathbb{R}$ et $f_K(x) = (x^2 + 3x + K)e^{-x}$. On a $f'_K(x) = (2x + 3)e^{-x} - (x^2 + 3x + K)e^{-x} = (-x^2 - x + 3 - K)e^{-x}$, puis

$$f''_K(x) = (-2x - 1)e^{-x} - (-x^2 - x + 3 - K)e^{-x} = (x^2 - x + K - 4)e^{-x}.$$

Comme $e^{-x} > 0$, $f''_K(x)$ a le signe du trinôme $x^2 - x + K - 4$. La courbe admet un point d'inflexion en chaque abscisse où f''_K s'annule en changeant de signe. Un trinôme du second degré change de signe exactement en ses racines lorsqu'il en a deux distinctes, et ne change pas de signe sinon. Son discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4(K - 4) = 17 - 4K$.

La courbe a exactement deux points d'inflexion si et seulement si $\Delta > 0$, soit $K < \frac{17}{4}$. **Les solutions cherchées sont les fonctions $x \mapsto (x^2 + 3x + K)e^{-x}$ avec $K < \frac{17}{4}$.**

Partie C

1. Pour tout réel x , $f(x) = x^2 e^{-x} + 3x e^{-x} + 2e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} + 3\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$; de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. a) $f'(x) = (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x + 2) \times (-e^{-x}) = (2x + 3 - x^2 - 3x - 2)e^{-x} = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$.
Vérifié.

2. b) $e^{-x} > 0$ pour tout réel x , donc $f'(x)$ a le signe de $-x^2 - x + 1$. Discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5 > 0$; racines $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,62$ et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{-2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1,62$. Le coefficient de x^2 est négatif, donc le trinôme est positif entre les racines et négatif à l'extérieur.

Ainsi $f'(x) < 0$ sur $\left]-\infty; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$, et $f'(x) > 0$ sur $\left]\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right[$.
Donc f est décroissante sur $\left]-\infty; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right[$, croissante sur $\left]\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right[$ et décroissante sur $\left]\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$, avec $\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = 0$.

3. Pour $x \geq 0$, $x^2 \geq 0$, $3x \geq 0$ et $2 > 0$, donc $x^2 + 3x + 2 > 0$; comme $e^{-x} > 0$, on obtient $f(x) > 0$. **f est (strictement) positive sur $[0; +\infty[$.** (On peut aussi remarquer que $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$, produit de deux facteurs positifs pour $x \geq 0$.)

4. f est continue et positive sur $[0; \alpha]$, donc l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = \alpha$ est $\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx = F(\alpha) - F(0)$.

$F(0) = -7$, donc $\mathcal{A}(\alpha) = (-\alpha^2 - 5\alpha - 7)e^{-\alpha} + 7$. $\mathcal{A}(\alpha) = 7 - (\alpha^2 + 5\alpha + 7)e^{-\alpha}$ **unités d'aire**. (Contrôle : $F'(x) = (-2x - 5)e^{-x} + (x^2 + 5x + 7)e^{-x} = (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = f(x)$, et $\mathcal{A}(\alpha) \rightarrow 7$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$ par croissances comparées.)

Conseils pour le jour J

Ce sujet est très classique et récompense la rigueur de rédaction : pour la formule des probabilités totales et la loi binomiale, citez les hypothèses (partition, répétition d'épreuves indépendantes) avant de calculer. En 1.B.2.b, l'inéquation avec $\ln$ exige de mentionner que $\ln(0,855) < 0$ et de changer le sens de l'inégalité ; en 1.B.3, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev doit être écrite avec sa forme générale avant d'y injecter la variance admise. Dans l'exercice 2, la récurrence demandée ne « passe » pas telle quelle : n'hésitez pas à renforcer l'hypothèse ($a_n \geq 3^n + 1$) en le disant explicitement, les correcteurs valorisent cette initiative. Pour le vrai/faux de géométrie, une affirmation vraie se démontre et une affirmation fausse se réfute par un calcul complet (angle $\frac{2\pi}{3}$, pas seulement « le cosinus n'est pas $\frac{\sqrt{3}}{2}$ »). Gardez au moins 50 minutes pour l'exercice 4 : la partie B.5 (points d'inflexion avec paramètre) est la question la plus discriminante du sujet.