Corrigé – Bac 2024 – spécialité mathématiques – Métropole, La Réunion, Mayotte, jour 2

Probabilités conditionnelles, loi binomiale et inégalité de concentration, Suite récurrente et équation différentielle : taux de chlore d'une piscine, Étude d'une fonction logarithme, convexité et distance minimale, Vrai ou faux : géométrie dans l'espace

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Probabilités conditionnelles, loi binomiale et inégalité de concentration *(5 pts)*

1. 91,7 % des étudiants ont répondu « oui » : $P(Q) = 0{,}917$. 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » : $P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0{,}65$.

2. a) Arbre : depuis la racine, R avec la probabilité x et $\bar{R}$ avec $1-x$. Après R : Q avec 0,98 et $\bar{Q}$ avec 0,02. Après $\bar{R}$: Q avec 0,35 et $\bar{Q}$ avec 0,65.

2. b) R et $\bar{R}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales : $P(Q) = P(R) \times P_R(Q) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(Q) = 0{,}98x + 0{,}35(1-x) = 0{,}63x + 0{,}35$.

Comme $P(Q) = 0{,}917$: $0{,}63x = 0{,}917 - 0{,}35 = 0{,}567$, d'où $x = \dfrac{0{,}567}{0{,}63} = 0{,}9$. **$x = 0{,}9$.**

3. $P_Q(R) = \dfrac{P(R \cap Q)}{P(Q)} = \dfrac{0{,}9 \times 0{,}98}{0{,}917} = \dfrac{0{,}882}{0{,}917} \approx 0{,}962$. **Sachant qu'il a répondu « oui », la probabilité que l'étudiant ait réussi est environ $0{,}962$.**

4. On cherche la note k telle que la proportion d'étudiants récompensés, $P(N \geqslant k)$, soit la plus proche possible de 0,65. À la calculatrice, avec $N \sim \mathcal{B}(20; 0{,}615)$: $P(N \geqslant 12) = 1 - P(N \leqslant 11) \approx 0{,}649$ et $P(N \geqslant 11) = 1 - P(N \leqslant 10) \approx 0{,}797$, $P(N \geqslant 13) \approx 0{,}471$. La valeur la plus proche de 65 % est obtenue pour $k = 12$ (environ 64,9 %). **La directrice doit récompenser les étudiants à partir de la note 12.**

5. Chaque N_i suit $\mathcal{B}(20; 0{,}615)$, donc $E(N_i) = 20 \times 0{,}615 = 12{,}3$ et $V(N_i) = 20 \times 0{,}615 \times 0{,}385 = 4{,}7355$. Par linéarité, $E(S) = 10 \times 12{,}3 = 123$. Les N_i étant indépendantes, $V(S) = 10 \times 4{,}7355 = 47{,}355$. **$E(S) = 123$ et $V(S) = 47{,}355$.**

6. a) $M = \dfrac{S}{10}$ modélise **la moyenne des notes des dix étudiants interrogés**.

6. b) $E(M) = \dfrac{1}{10}E(S) = \dfrac{123}{10} = 12{,}3$ et $V(M) = \dfrac{1}{10^2}V(S) = \dfrac{47{,}355}{100} = 0{,}47355$ (car $V(aX) = a^2V(X)$). **$E(M) = 12{,}3$ et $V(M) = 0{,}47355$.**

6. c) L'événement $\$\backslash\{10\{,\}3$La probabilité que la moyenne des dix notes soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est bien d'au moins 80 %.

Exercice 2 – Suite récurrente et équation différentielle : taux de chlore d'une piscine *(5 pts)*

Partie A : modèle discret

1. La piscine contient $50\ \text{m}^3 = 50\,000$ L et on ajoute $15\ \text{g} = 15\,000$ mg de chlore. Le taux augmente donc de $\dfrac{15\,000}{50\,000} = 0{,}3\ \text{mg·L}^{-1}$. **L'ajout fait augmenter le taux de $0{,}3\ \text{mg·L}^{-1}$.**

2. a) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$ ».

Initialisation : $v_0 = 0{,}7$ et $v_1 = 0{,}92 \times 0{,}7 + 0{,}3 = 0{,}944$; on a bien $0{,}7 \leqslant 0{,}944 \leqslant 4$.

Hérédité : soit n tel que $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$. La fonction $x \mapsto 0{,}92x + 0{,}3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ (coefficient $0{,}92 > 0$), donc $0{,}92v_n + 0{,}3 \leqslant 0{,}92v_{n+1} + 0{,}3 \leqslant 0{,}92 \times 4 + 0{,}3$, soit $v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 3{,}98 \leqslant 4$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : **pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.**

2. b) La suite est croissante et majorée par 4 : d'après le théorème de convergence monotone, (v_n) **converge** vers une limite L. La fonction $x \mapsto 0{,}92x + 0{,}3$ étant continue, L vérifie $L = 0{,}92L + 0{,}3$, soit $0{,}08L = 0{,}3$, $L = 3{,}75$.

3. À long terme, le taux de chlore tend vers $3{,}75\ \text{mg·L}^{-1}$, valeur supérieure à $3\ \text{mg·L}^{-1}$. **Non : le taux ne sera pas conforme à la préconisation (entre 1 et $3\ \text{mg·L}^{-1}$).**

4. Algorithme complété :

```
def alerte_chlore(s) :
    n = 0
    v = 0.7
    while v <= s :
        n = n + 1
        v = 0.92*v + 0.3
    return n
```

Tant que $v_n \leqslant s$, on calcule le terme suivant ; la boucle s'arrête au premier n tel que $v_n > s$ (il existe si $s < 3{,}75$, la suite étant croissante de limite $3{,}75$).

5. On cherche le plus petit n tel que $v_n > 3$. En posant $w_n = v_n - 3{,}75$, on a $w_{n+1} = 0{,}92w_n$, d'où $v_n = 3{,}75 - 3{,}05 \times 0{,}92^n$. Alors $v_n > 3 \iff 0{,}92^n < \dfrac{0{,}75}{3{,}05} \iff n > \dfrac{\ln(0{,}75/3{,}05)}{\ln 0{,}92} \approx 16{,}8$. **L'instruction *alerte_chlore(3)* renvoie** 17 ($v_{16} \approx 2{,}95$ et $v_{17} \approx 3{,}01$) : 17 jours après le mercredi 19 juin, soit le samedi 6 juillet, le taux de chlore dépasse pour la première fois $3\ \text{mg·L}^{-1}$, limite haute préconisée.

Partie B : modèle continu

1. (E) est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}08$ et $b = \dfrac{q}{50}$. Ses solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a} = Ce^{-0{,}08x} + \dfrac{q}{50 \times 0{,}08} = Ce^{-0{,}08x} + \dfrac{q}{4}$, $C \in \mathbb{R}$. **f est donc de la forme $f(x) = Ce^{-0{,}08x} + \dfrac{q}{4}$.**

2. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0{,}08x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{q}{4}$.

2. b) Stabilisation autour de $2\ \text{mg·L}^{-1}$: $\dfrac{q}{4} = 2$, soit $q = 8$ **g par jour**. Taux initial : $f(0) = C + \dfrac{q}{4} = C + 2 = 0{,}7$, soit $C = -1{,}3$. Ainsi $f(x) = -1{,}3e^{-0{,}08x} + 2$.

Exercice 3 – Étude d'une fonction logarithme, convexité et distance minimale *(6 pts)*

Partie A : exploitation du graphique

1. B est le point de C_f d'abscisse -1 ; on lit $f(-1) = -2$. $f'(-1)$ est le coefficient directeur de T, qui passe par $B(-1;-2)$ et $A(0;-1)$: $f'(-1) = \dfrac{-1-(-2)}{0-(-1)} = 1$. **$f'(-1) = 1$.**

2. Non. Une fonction convexe a sa courbe au-dessus de chacune de ses tangentes. Or, près de $x = -2$, la courbe C_f plonge vers $-\infty$ et passe en dessous de la tangente T (qui vaut -3 en $x = -2$) : la courbe traverse T. C_f n'est donc pas convexe sur $]-2;+\infty[$ (elle change de concavité, ce que confirme la partie B).

3. La courbe coupe l'axe des abscisses une seule fois, en un point d'abscisse proche de 0,1. **On conjecture que $f(x) = 0$ admet une unique solution, environ $0{,}1$.**

Partie B : étude de la fonction

1. $\lim\limits_{x\to -2^+}(x+2) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to -2^+}\ln(x+2) = -\infty$; de plus $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+2x-1) = 4-4-1 = -1$. Par somme, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$. Graphiquement, **la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à C_f.**

2. $f'(x) = 2x + 2 + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{(2x+2)(x+2)+1}{x+2} = \dfrac{2x^2+4x+2x+4+1}{x+2}$. **$f'(x) = \dfrac{2x^2+6x+5}{x+2}$.**

3. Le trinôme $2x^2+6x+5$ a pour discriminant $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$: il est strictement positif sur $\mathbb{R}$ (signe de 2). Comme $x+2 > 0$ sur $]-2;+\infty[$, $f'(x) > 0$. **f est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$**, avec $\lim\limits_{-2^+} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

x	-2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	$-\infty$	croissante	$+\infty$

4. f est continue et strictement croissante sur $]-2;+\infty[$, avec $\lim\limits_{-2^+} f = -\infty < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty > 0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.** À la calculatrice, $f(0{,}11) \approx -0{,}021 < 0$ et $f(0{,}12) \approx 0{,}006 > 0$, puis $f(0{,}115) < 0$ et $f(0{,}125) > 0$: $\alpha \approx 0{,}12$.

5. f étant strictement croissante et $f(\alpha) = 0$: **$f(x) < 0$ sur $]-2;\alpha[$, $f(\alpha) = 0$ et $f(x) > 0$ sur $]\alpha;+\infty[$.**

6. $f'(x) = 2x + 2 + \dfrac{1}{x+2}$ donc $f''(x) = 2 - \dfrac{1}{(x+2)^2} = \dfrac{2(x+2)^2 - 1}{(x+2)^2}$. Le signe de f'' est celui de $2(x+2)^2 - 1$: $2(x+2)^2 - 1 > 0 \iff (x+2)^2 > \dfrac{1}{2} \iff x+2 > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (car $x+2>0$) $\iff x > -2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

f'' s'annule en changeant de signe (négative puis positive) en une seule valeur : **C_f admet un unique point d'inflexion, d'abscisse $-2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx -1{,}29$.** f est concave sur $\left]-2;-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et convexe ensuite, ce qui confirme la partie A.

Partie C : une distance minimale

1. Dans le repère orthonormé, $J(0;1)$ et $M(x;\ln(x+2))$. Donc $JM^2 = (x-0)^2 + (\ln(x+2)-1)^2$. **$h(x) = x^2 + [\ln(x+2)-1]^2$.**

2. a) $h'(x) = \dfrac{2f(x)}{x+2}$ avec $x+2>0$: $h'(x)$ a le signe de $f(x)$, donné à la question B.5. h **est décroissante sur** $]-2;\alpha]$ **et croissante sur** $[\alpha;+\infty[$, avec un minimum en α.

x	-2		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		décroissante	$h(\alpha)$	croissante	

2. b) $JM = \sqrt{h(x)}$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$: JM est minimale exactement lorsque $h(x)$ est minimale, c'est-à-dire pour $x=\alpha$.

3. a) $f(\alpha)=0$ s'écrit $\alpha^2+2\alpha-1+\ln(\alpha+2)=0$, soit $\ln(\alpha+2)=1-2\alpha-\alpha^2$.

3. b) $g'(x)=\dfrac{1}{x+2}$, donc la tangente à C_g en M_α a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{\alpha+2}$.

La droite (JM_α) passe par $J(0;1)$ et $M_\alpha(\alpha;\ln(\alpha+2))$; son coefficient directeur est $\dfrac{\ln(\alpha+2)-1}{\alpha-0} = \dfrac{1-2\alpha-\alpha^2-1}{\alpha} = \dfrac{-\alpha(2+\alpha)}{\alpha} = -(\alpha+2)$ (avec $\alpha\neq 0$).

Le produit des coefficients directeurs vaut $\dfrac{1}{\alpha+2}\times(-(\alpha+2)) = -1$. **La tangente en M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires** : le point de C_g le plus proche de J est celui où (JM) est normale à la courbe.

Exercice 4 – Vrai ou faux : géométrie dans l'espace *(4 pts)*

Affirmation 1 : VRAIE. $\overrightarrow{AC}(2;4;1)$ et $\overrightarrow{AD}(-2;0;4)$ ne sont pas colinéaires, donc A, C, D définissent un plan. Les trois points vérifient l'équation proposée : $A : 16-0+0-16=0$; $C : 32-20+4-16=0$; $D : 0-0+16-16=0$. **Le plan (ACD) a bien pour équation $8x-5y+4z-16=0$.** (On peut aussi vérifier que $\vec{n}(8;-5;4)$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$: $16-20+4=0$, et à $\overrightarrow{AD}$: $-16+0+16=0$.)

Affirmation 2 : FAUSSE. Les quatre points sont coplanaires si et seulement si B appartient au plan (ACD). Or $8\times 0-5\times 4+4\times 3-16=-24\neq 0$. $B\notin(ACD)$ **: les points ne sont pas coplanaires.**

Affirmation 3 : VRAIE. $(AC) : x=2+2t$, $y=4t$, $z=t$ $(t\in\mathbb{R})$ et (BH), de vecteur directeur $\overrightarrow{BH}(-1;-3;-1)$: $x=-s$, $y=4-3s$, $z=3-s$ $(s\in\mathbb{R})$. Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires. Point commun : la troisième équation donne $t=3-s$; la première : $2+2(3-s)=-s$, soit $8-2s=-s$, $s=8$ et $t=-5$; la deuxième : $4\times(-5)=-20$ et $4-3\times 8=-20$, vérifiée. **Les droites sont sécantes, au point $(-8;-20;-5)$.**

Affirmation 4 : VRAIE. $H\in(ABC) : -1-1+4-2=0$. De plus $\overrightarrow{DH}(-1;1;-2)=-\vec{n}$ où $\vec{n}(1;-1;2)$ est un vecteur normal au plan (ABC) : la droite (DH) est orthogonale au plan. H **est le projeté orthogonal de D sur (ABC).**

Conseils pour le jour J

Exercice 1 : la question 4 est inhabituelle (chercher le seuil à partir duquel $P(N \geqslant k) \approx 0{,}65$) : présente les deux valeurs encadrantes obtenues à la calculatrice pour justifier le choix de 12. Pour la question 6.c, écris l'intervalle sous la forme $|M - 12{,}3| < 2$ avant d'appliquer Bienaymé-Tchebychev. Exercice 2 : la conversion d'unités de la question A.1 (m³ en litres, grammes en milligrammes) doit apparaître ; pour la question A.5, l'expression explicite $v_n = 3{,}75 - 3{,}05 \times 0{,}92^n$ (suite auxiliaire géométrique) permet de justifier le résultat sans recopier 17 lignes de calculs. Exercice 3 : c'est le gros exercice ; ne reste pas bloqué sur la partie A, dont les réponses sont confirmées par la partie B. En C.3.b, tout repose sur le remplacement de $\ln(\alpha + 2)$ par $1 - 2\alpha - \alpha^2$: c'est ce que rappelle la question précédente. Exercice 4 : pour une droite passant par deux points, écris la représentation paramétrique avec un second paramètre (s) et résous le système complet, y compris la vérification de la troisième équation.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).