Corrigé – Bac 2024 – spécialité mathématiques – Métropole, La Réunion, Mayotte, jour 1

Vrai ou faux : fonction exponentielle, équation différentielle et suites, Probabilités conditionnelles, loi binomiale et somme de variables aléatoires, Géométrie dans l'espace : plan, projeté orthogonal et volume d'un tétraèdre, Étude d'une fonction logarithme, convexité et calcul d'aire

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Vrai ou faux : fonction exponentielle, équation différentielle et suites *(4 pts)*

Affirmation 1 : VRAIE. Pour tout réel x, $f(x) = 5xe^{-x} = 5\dfrac{x}{e^x}$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. **La droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.** (En $-\infty$, $f(x) \to -\infty$ par produit, mais une asymptote en $+\infty$ suffit.)

Affirmation 2 : VRAIE. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5e^{-x} + 5x \times (-e^{-x}) = (5 - 5x)e^{-x}$. Alors $f'(x) + f(x) = (5 - 5x)e^{-x} + 5xe^{-x} = 5e^{-x}$: **f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.**

Affirmation 3 : FAUSSE. Le théorème des gendarmes ne s'applique que si les deux suites encadrantes ont la *même* limite, ce qui n'est pas le cas ici. Contre-exemple : $u_n = -1$, $w_n = 1$ et $v_n = (-1)^n$. On a bien $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout n, (u_n) converge vers -1 et (w_n) vers 1, mais (v_n) ne converge pas (elle prend alternativement les valeurs 1 et -1). **L'affirmation est fausse.**

Affirmation 4 : VRAIE. Soit n un entier naturel. Comme (u_n) est croissante, $u_0 \leqslant u_n$; et comme (w_n) est décroissante, $w_n \leqslant w_0$. Avec l'encadrement de l'énoncé : $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant w_0$. **Pour tout n, $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.**

Exercice 2 – Probabilités conditionnelles, loi binomiale et somme de variables aléatoires *(5 pts)*

1. Arbre : depuis la racine, I (0,6), M (0,3), G (0,1). Après I : S (0,75) et $\bar{S}$ (0,25). Après M : S (0,9) et $\bar{S}$ (0,1). Après G : S (0,8) et $\bar{S}$ (0,2).

2. $P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S) = 0{,}6 \times 0{,}75 = 0{,}45$. **La probabilité que le client ait acheté sur internet et soit satisfait est** $0{,}45$**.**

3. I, M, G forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales : $P(S) = P(I \cap S) + P(M \cap S) + P(G \cap S) = 0{,}45 + 0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}45 + 0{,}27 + 0{,}08 = 0{,}8$. $P(S) = 0{,}8$**.**

4. $P_S(I) = \dfrac{P(I \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}45}{0{,}8} = 0{,}5625$. **Sachant que le client est satisfait, la probabilité qu'il ait acheté sur internet est environ** $0{,}563$ (arrondi à 10^{-3}).

5. a) On répète 30 fois, de façon identique et indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise), une épreuve de Bernoulli de succès « le client est satisfait », de probabilité 0,8 ; X compte les succès. X **suit la loi binomiale** $\mathcal{B}(30 ; 0{,}8)$**.**

5. b) $P(X \geqslant 25) = 1 - P(X \leqslant 24) \approx 1 - 0{,}572 = 0{,}428$ (calculatrice). **La probabilité qu'au moins** 25 **clients soient satisfaits est environ** $0{,}428$**.**

6. Pour un échantillon de n clients, la probabilité qu'aucun ne soit insatisfait (tous satisfaits) est $0{,}8^n$ (indépendance), donc la probabilité qu'au moins un ne soit pas satisfait est $1 - 0{,}8^n$. On résout :

$1 - 0{,}8^n > 0{,}99 \iff 0{,}8^n < 0{,}01 \iff n \ln(0{,}8) < \ln(0{,}01) \iff n > \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}$ (division par $\ln(0{,}8) < 0$, qui change le sens).

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \approx 20{,}6$. **Il faut contacter au moins** 21 **clients.**

7. a) Par linéarité de l'espérance, $E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$. Comme T_1 et T_2 sont indépendantes, $V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = 3$. $E(T) = 7$ **jours et** $V(T) = 3$**.**

7. b) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|T - 7| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{V(T)}{3^2} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$, donc $P(|T - 7| < 3) \geqslant 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

Or T est à valeurs entières (somme de deux nombres entiers de jours), donc $|T - 7| < 3$ équivaut à $|T - 7| \leqslant 2$, c'est-à-dire à $5 \leqslant T \leqslant 9$. **La probabilité que le client reçoive son téléviseur entre** 5 **et** 9 **jours après sa commande est supérieure ou égale à** $\dfrac{2}{3}$**.**

Exercice 3 – Géométrie dans l'espace : plan, projeté orthogonal et volume d'un tétraèdre *(5 pts)*

1. a) $\overrightarrow{CA}(5;5;-10)$ et $\overrightarrow{CD}\left(0;0;-\dfrac{25}{2}\right)$ ne sont pas colinéaires (les deux premières coordonnées de $\overrightarrow{CD}$ sont nulles, pas celles de $\overrightarrow{CA}$). $\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{CA} = 5 - 5 + 0 = 0$ et $\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{CD} = 0 + 0 + 0 = 0$. $\vec{n}_1$ **est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan** (CAD) **: c'est un vecteur normal à ce plan.**

1. b) Le plan (CAD) a une équation de la forme $x - y + k = 0$. Il passe par $C(0;0;10)$: $0 - 0 + k = 0$, $k = 0$. (CAD) **:** $x - y = 0$**.**

2. a) Un point de $\mathcal{D}$ est dans (CAD) si $\dfrac{5}{2}t - \left(5 - \dfrac{5}{2}t\right) = 0$, soit $5t - 5 = 0$, $t = 1$. Pour $t = 1$: $x = \dfrac{5}{2}$, $y = 5 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{2}$, $z = 0$. $H\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2};0\right)$**.**

2. b) H appartient au plan (CAD) (question précédente) et $\overrightarrow{BH}\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{5}{2};0\right) = \dfrac{5}{2}\vec{n}_1$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}_1$, donc la droite (BH) est orthogonale au plan. H **est le projeté orthogonal de** B **sur** (CAD)**.**

3. a) $\overrightarrow{HA}\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2};0\right)$ et $\overrightarrow{HB}\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2};0\right)$. $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB} = -\dfrac{25}{4} + \dfrac{25}{4} + 0 = 0$. **Le triangle** ABH **est rectangle en** H**.**

3. b) $HA = \sqrt{\dfrac{25}{4} + \dfrac{25}{4}} = \sqrt{\dfrac{25}{2}}$ et de même $HB = \sqrt{\dfrac{25}{2}}$. Aire $= \dfrac{1}{2} \times HA \times HB = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{25}{2} = \dfrac{25}{4}$. **L'aire de** ABH **est** $\dfrac{25}{4}$**.**

4. a) Les points A, B, H ont tous une cote nulle : le plan (ABH) est le plan d'équation $z = 0$, de vecteur normal $\vec{k}$. La droite (CO) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{OC}(0;0;10) = 10\vec{k}$: elle est orthogonale au plan (ABH), et elle passe par C. De plus $O \in (ABH)$ (car $z_O = 0$) : O est le pied de la perpendiculaire. (CO) **est la hauteur du tétraèdre** $ABCH$ **issue de** C**.**

4. b) $V = \dfrac{1}{3} \times \text{Aire}(ABH) \times CO = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{25}{4} \times 10 = \dfrac{250}{12}$. $V = \dfrac{125}{6}$ **unités de volume.**

5. $AB = 5$ et $BC = \sqrt{0 + 25 + 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$. Le triangle ABC étant rectangle en B, son aire est $\dfrac{1}{2} \times 5 \times 5\sqrt{5} = \dfrac{25\sqrt{5}}{2}$. En prenant ABC pour base du tétraèdre $ABCH$, la hauteur correspondante est la distance d de H au plan (ABC) : $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{25\sqrt{5}}{2} \times d$. Donc $d = \dfrac{3V}{\text{Aire}(ABC)} = \dfrac{3 \times \frac{125}{6}}{\frac{25\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{125}{2} \times \dfrac{2}{25\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

La distance de H **au plan** (ABC) **est** $\sqrt{5}$**.**

Exercice 4 – Étude d'une fonction logarithme, convexité et calcul d'aire *(6 pts)*

Partie A : étude de f

1. a) *En* 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2}\ln x = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-2) = -2$; par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. *En* $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\ln x = +\infty$; par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

1. b) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{2x}{2x} + \dfrac{1}{2x}$. $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{2x+1}{2x}}$.

1. c) Pour $x > 0$, $2x+1 > 0$ et $2x > 0$, donc $f'(x) > 0$. **f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.**

1. d) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2x}$ donc $f''(x) = -\dfrac{1}{2x^2} < 0$ pour tout $x > 0$. **f est concave sur $]0;+\infty[$.**

2. a) f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, avec $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$**. De plus $f(1) = 1 - 2 + 0 = -1 < 0$ et $f(2) = 0 + \dfrac{1}{2}\ln 2 \approx 0{,}35 > 0$, donc $\alpha \in [1;2]$ (on trouve $\alpha \approx 1{,}73$).

2. b) f est strictement croissante et $f(\alpha) = 0$, donc : **$f(x) < 0$ pour $x \in]0;\alpha[$, $f(\alpha) = 0$ et $f(x) > 0$ pour $x \in]\alpha;+\infty[$.**

2. c) $f(\alpha) = 0$ s'écrit $\alpha - 2 + \dfrac{1}{2}\ln\alpha = 0$, soit $\dfrac{1}{2}\ln\alpha = 2 - \alpha$, soit $\ln\alpha = 2(2-\alpha)$.

Partie B : étude de g

1. $(x^2\ln x)' = 2x\ln x + x^2\times\dfrac{1}{x} = 2x\ln x + x$. Donc $g'(x) = -\dfrac{7}{4}x + 1 - \dfrac{1}{4}(2x\ln x + x) = -\dfrac{7}{4}x + 1 - \dfrac{1}{2}x\ln x - \dfrac{1}{4}x$, soit $g'(x) = 1 - 2x - \dfrac{1}{2}x\ln x$.

D'autre part, $xf\left(\dfrac{1}{x}\right) = x\left(\dfrac{1}{x} - 2 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{x}\right) = 1 - 2x - \dfrac{1}{2}x\ln x$ (car $\ln\dfrac{1}{x} = -\ln x$). **On a bien $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.**

2. a) Si $0\alpha.*D'après A.2.b, f est strictement positive sur*]\alpha;+\infty[$, donc $f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$ **pour** $x \in \left]0;\dfrac{1}{\alpha}\right[$.

2. b) Comme $x > 0$, $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$ a le signe de $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$: positif sur $\left]0;\dfrac{1}{\alpha}\right[$, nul en $\dfrac{1}{\alpha}$, négatif sur $\left]\dfrac{1}{\alpha};1\right]$. **$g$ est croissante sur $\left]0;\dfrac{1}{\alpha}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\alpha};1\right]$** ; elle admet un maximum en $x = \dfrac{1}{\alpha}$.

x	0		$\dfrac{1}{\alpha}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		croissante	maximum	décroissante	

Partie C : calcul d'aire

1. a) Pour $x \in]0;1]$: $g(x) - \left(-\dfrac{7}{8}x^2 + x\right) = -\dfrac{1}{4}x^2 \ln x$. Or $x^2 > 0$ et $\ln x \leqslant 0$ sur $]0;1]$, donc $-\dfrac{1}{4}x^2 \ln x \geqslant 0$. C_g **est au-dessus de** $\mathcal{P}$ **sur** $]0;1]$, les deux courbes se touchant au point d'abscisse 1.

1. b) Intégration par parties avec $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x^2$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, $v(x) = \dfrac{x^3}{3}$ (fonctions dérivables à dérivées continues sur $\left[\dfrac{1}{\alpha};1\right]$) :

$$\int_{1/\alpha}^{1} x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{1/\alpha}^{1} - \int_{1/\alpha}^{1} \frac{x^2}{3}\, dx = 0 - \frac{1}{3\alpha^3}\ln\frac{1}{\alpha} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_{1/\alpha}^{1} = \frac{\ln\alpha}{3\alpha^3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3}.$$

Avec $\ln\alpha = 2(2-\alpha) = 4 - 2\alpha$: $\displaystyle\int_{1/\alpha}^{1} x^2 \ln x\, dx = \frac{3(4-2\alpha)}{9\alpha^3} - \frac{\alpha^3}{9\alpha^3} + \frac{1}{9\alpha^3} = \frac{12 - 6\alpha - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3}$.

$$\boxed{\int_{1/\alpha}^{1} x^2 \ln x\, dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}.}$$

2. C_g étant au-dessus de $\mathcal{P}$, l'aire du domaine est $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{1/\alpha}^{1} \left(g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right)\right) dx = \int_{1/\alpha}^{1} \left(-\frac{1}{4}x^2 \ln x\right) dx = -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$.

$\mathcal{A} = \dfrac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3}$ **unité d'aire** (avec $\alpha \approx 1{,}73$, $\mathcal{A} \approx 0{,}014$, ce qui est cohérent avec la petite zone hachurée de la figure).

Conseils pour le jour J

Exercice 1 : pour l'affirmation 3, un contre-exemple explicite ($v_n = (-1)^n$) est la seule justification acceptée, et précise pourquoi le théorème des gendarmes ne s'applique pas (limites différentes). Exercice 2 : la question 7.b cache le vrai piège du sujet : Bienaymé-Tchebychev donne $P(|T-7|<3) \geqslant \frac{2}{3}$, et c'est parce que T est entière que « $|T-7|<3$ » équivaut à « $5 \leqslant T \leqslant 9$ » ; sans cette remarque, la réponse est incomplète. Exercice 3 : c'est un exercice très guidé ; à la question 5, la méthode des « deux bases » du tétraèdre (même volume calculé avec deux bases différentes) est un classique à connaître. Exercice 4 : la fonction g se ramène à f par $g'(x) = xf(1/x)$: ne cherche pas à étudier g' directement ; en partie C, remplace $\ln\alpha$ par $2(2-\alpha)$ comme le rappelle l'énoncé, c'est ce qui fait disparaître le logarithme. Réserve 70 minutes à cet exercice à 6 points.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).