Corrigé – Bac 2024 – spécialité mathématiques – Amérique du Nord, jour 2

Probabilités conditionnelles et loi binomiale : véhicules hybrides, Géométrie dans l'espace : pavé droit, plan et projeté orthogonal, Suite récurrente et suite auxiliaire géométrique, Fonction logarithme, primitive et calcul d'aire

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Probabilités conditionnelles et loi binomiale : véhicules hybrides *(5 pts)*

Les probabilités sont arrondies au dix-millième.

Partie A

1. Arbre pondéré : depuis la racine, N avec la probabilité $0{,}2286$ et $\bar{N}$ avec $1 - 0{,}2286 = 0{,}7714$. Après N : R avec $0{,}0808$ et $\bar{R}$ avec $0{,}9192$. Après $\bar{N}$: R avec $0{,}0127$ et $\bar{R}$ avec $0{,}9873$.

2. $P(N \cap R) = P(N) \times P_N(R) = 0{,}2286 \times 0{,}0808 = 0{,}01847088$. $P(N \cap R) \approx 0{,}0185$**.**

3. N et $\bar{N}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales :

$P(R) = P(N \cap R) + P(\bar{N} \cap R) = 0{,}2286 \times 0{,}0808 + 0{,}7714 \times 0{,}0127 = 0{,}01847088 + 0{,}00979678 = 0{,}02826766$.

Arrondie au dix-millième, $P(R) = 0{,}0283$**.**

4. $P_R(N) = \dfrac{P(N \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0{,}01847088}{0{,}02826766} \approx 0{,}6534$. **Sachant que le véhicule est hybride rechargeable, la probabilité qu'il soit neuf est environ** $0{,}6534$**.** (En gardant les valeurs exactes intermédiaires ; avec les valeurs arrondies $\dfrac{0{,}0185}{0{,}0283} \approx 0{,}6537$.)

Partie B

1. On répète 500 fois, de manière identique et indépendante (tirage avec remise), une épreuve de Bernoulli de succès « le véhicule est neuf », de probabilité $0{,}65$. X **suit la loi binomiale de paramètres** $n = 500$ **et** $p = 0{,}65$**.**

2. $P(X = 325) = \binom{500}{325} \times 0{,}65^{325} \times 0{,}35^{175} \approx 0{,}0374$ (calculatrice). **La probabilité que exactement** 325 **véhicules soient neufs est environ** $0{,}0374$**.**

3. $P(X \geqslant 325) = 1 - P(X \leqslant 324) \approx 1 - 0{,}4794 = 0{,}5206$. $P(X \geqslant 325) \approx 0{,}5206$: il y a environ $52\,\%$ de chances qu'au moins 325 véhicules (soit au moins $65\,\%$ de l'échantillon, la valeur de l'espérance $E(X) = 500 \times 0{,}65 = 325$) soient neufs.

Partie C

1. Les n choix sont indépendants et chaque véhicule est d'occasion avec la probabilité $1 - 0{,}65 = 0{,}35$. Donc $p_n = 0{,}35^n$.

2. « Au moins un véhicule neuf » est l'événement contraire de « tous d'occasion », donc $q_n = 1 - 0{,}35^n$. On résout :

$q_n \geqslant 0{,}9999 \iff 0{,}35^n \leqslant 0{,}0001 \iff n \ln(0{,}35) \leqslant \ln(0{,}0001)$ (croissance de la fonction ln) $\iff n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}35)}$ car $\ln(0{,}35) < 0$ (le sens de l'inégalité change).

Or $\dfrac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}35)} \approx 8{,}77$. **La plus petite valeur est** $n = 9$**.** (Contrôle : $0{,}35^8 \approx 2{,}3 \times 10^{-4} > 10^{-4}$ et $0{,}35^9 \approx 7{,}9 \times 10^{-5} \leqslant 10^{-4}$.)

Exercice 2 – Géométrie dans l'espace : pavé droit, plan et projeté orthogonal *(5 pts)*

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $C(3;1;0)$, $G(3;1;1)$ (pavé droit avec $AB=3$, $AD=AE=1$ et $AI=1$).

1. $F(3;0;1)$**,** $H(0;1;1)$ **et** $M\left(\frac{3}{2};1;0\right)$ (milieu de $C(3;1;0)$ et $D(0;1;0)$).

2. a) $\overrightarrow{HM}\left(\frac{3}{2};0;-1\right)$ et $\overrightarrow{HF}(3;-1;0)$ ne sont pas colinéaires (la deuxième coordonnée de $\overrightarrow{HM}$ est nulle, pas celle de $\overrightarrow{HF}$). $\vec{n}\cdot\overrightarrow{HM}=2\times\frac{3}{2}+0-3=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{HF}=6-6+0=0$. $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMF) : $\vec{n}(2;6;3)$ **est normal au plan** (HMF).

2. b) Une équation de (HMF) est de la forme $2x+6y+3z+k=0$. Avec $H(0;1;1)$: $0+6+3+k=0$, soit $k=-9$. (HMF) **:** $2x+6y+3z-9=0$**.** (Contrôle : F : $6+0+3-9=0$; M : $3+6+0-9=0$.)

2. c) $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{m}(5;15;-3)$. Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires. Or $\frac{5}{2}=\frac{15}{6}=2{,}5$ mais $\frac{-3}{3}=-1\neq 2{,}5$: $\vec{m}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires. $\mathcal{P}$ **n'est pas parallèle à** (HMF)**.**

3. (DG) passe par $D(0;1;0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DG}(3;0;1)$. **Une représentation paramétrique est** $x=3t$**,** $y=1$**,** $z=t$**, avec** $t\in\mathbb{R}$**.**

4. On reporte dans l'équation du plan : $2(3t)+6\times 1+3t-9=0$, soit $9t-3=0$, $t=\frac{1}{3}$. $N\left(1;1;\frac{1}{3}\right)$**.** (Contrôle : $2+6+1-9=0$.)

5. R est le projeté orthogonal de G sur (HMF) si et seulement si $R\in(HMF)$ et $\overrightarrow{GR}$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}$. On a bien $R\in(HMF)$: $2\times 3+6\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}-9=6+1{,}5+1{,}5-9=0$. Mais $\overrightarrow{GR}\left(0;-\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right)$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}(2;6;3)$ (première coordonnée nulle contre 2). **Non,** R **n'est pas le projeté orthogonal de** G **sur le plan** (HMF)**.**

Exercice 3 – Suite récurrente et suite auxiliaire géométrique *(6 pts)*

1. g est dérivable sur $[0;1]$ et $g'(x) = 2 - 2x = 2(1-x)$. Pour $x \in [0;1[$, $g'(x) > 0$, et g' ne s'annule qu'en 1 : g **est strictement croissante sur** $[0;1]$. $g(0) = 0$ **et** $g(1) = 2 - 1 = 1$**.**

2. $u_1 = g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$; $u_2 = g\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{24-9}{16} = \dfrac{15}{16}$. $u_1 = \dfrac{3}{4}$ **et** $u_2 = \dfrac{15}{16}$**.**

3. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $0

Initialisation : $0 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} < 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit n tel que $0

Conclusion : **pour tout entier naturel** n**,** $0

4. D'après la question 3, (u_n) **est strictement croissante et majorée par** 1**. D'après le théorème de convergence monotone,** (u_n) **converge vers une limite** ℓ**, avec** $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$**.**

5. g **est continue sur** $[0;1]$ **(fonction polynôme) et** $u_{n+1} = g(u_n)$**, donc la limite vérifie** $\ell = g(\ell)$**, soit** $\ell = 2\ell - \ell^2$**, soit** $\ell^2 - \ell = 0$**, soit** $\ell(\ell - 1) = 0$ **:** $\ell = 0$ **ou** $\ell = 1$**. Comme** $\ell \geqslant u_0 = \dfrac{1}{2}$**,** $\ell = 1$**.**

6. v_n **est bien définie car** $1 - u_n > 0$**. Pour tout** n **:** $1 - u_{n+1} = 1 - 2u_n + u_n^2 = (1-u_n)^2$**. Donc** $v_{n+1} = \ln\left((1-u_n)^2\right) = 2\ln(1-u_n) = 2v_n$ **(avec** $1 - u_n > 0$**).** (v_n) **est géométrique de raison** 2**, de premier terme** $v_0 = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$**.**

7. $v_n = v_0 \times 2^n = -2^n \ln 2$ **pour tout entier naturel** n**.**

8. $v_n = \ln(1-u_n)$ **donne** $1 - u_n = e^{v_n}$**, soit** $u_n = 1 - e^{-2^n \ln 2} = 1 - \left(e^{\ln 2}\right)^{-2^n}$**.** $u_n = 1 - 2^{-2^n} = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}$**.**
(Contrôle : $u_1 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$**,** $u_2 = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$**.)**

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ **et** $0 < \dfrac{1}{2} < 1$**,** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n} = 0$**, donc** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$**, ce qui confirme la question 5.**

9. Script complété :

```
def seuil():
    n = 0
    u = 0.5
    while u < 0.95 :
        n = n + 1
        u = 2*u - u**2
    return n
```

Tant que $u_n < 0{,}95$**, on passe au terme suivant avec** $u_{n+1} = g(u_n)$ **et on incrémente** n**. La fonction renvoie** 3 **:** $u_2 = \dfrac{15}{16} = 0{,}9375 < 0{,}95$ **et** $u_3 = 1 - \dfrac{1}{256} \approx 0{,}996 \geqslant 0{,}95$**.**

Exercice 4 – Fonction logarithme, primitive et calcul d'aire *(4 pts)*

1. $f(x) = 0 \iff a\ln x = 0 \iff \ln x = 0$ **(car** $a \neq 0$**)** $\iff x = 1$**. La courbe** $\mathcal{C}$ **coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse** 1**.**

2. F **est dérivable sur** $]0;+\infty[$ **et** $F'(x) = a\left(1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1\right) = a(\ln x + 1 - 1) = a\ln x = f(x)$**.** F **est une primitive de** f **sur** $]0;+\infty[$**.**

3. Sur la figure, le domaine grisé est délimité par la courbe $\mathcal{C}$**, l'axe des abscisses et la droite d'équation** $x = x_0$ **: il va de** $x = 1$ **(où** $\mathcal{C}$ **coupe l'axe) à** $x = x_0$**. Sur** $[1;x_0]$**,** $\ln x \geqslant 0$ **et** $a > 0$**, donc** f **est continue et positive : l'aire est**

$$\mathcal{A} = \int_1^{x_0} f(x)\,dx = F(x_0) - F(1) = a(x_0\ln x_0 - x_0) - a(0-1).$$

$\mathcal{A} = a\left(x_0\ln x_0 - x_0 + 1\right)$ **unités d'aire.**

4. $f'(x) = \dfrac{a}{x}$**. La tangente** T **au point** $M(x_0; a\ln x_0)$ **a pour équation** $y = \dfrac{a}{x_0}(x - x_0) + a\ln x_0$**.**

Le point A **est le point de** T **d'abscisse** 0 **:** $y_A = \dfrac{a}{x_0}(0 - x_0) + a\ln x_0 = -a + a\ln x_0$**, donc** $A(0; a\ln x_0 - a)$**.**

Le point B**, projeté orthogonal de** M **sur l'axe des ordonnées, a la même ordonnée que** M **:** $B(0; a\ln x_0)$**.**

Les points A **et** B **sont sur l'axe des ordonnées, donc** $AB = |y_B - y_A| = |a\ln x_0 - (a\ln x_0 - a)| = |a| = a$ **car** $a > 0$**.**

$AB = a$ **: cette longueur ne dépend pas de** x_0**. (Méthode : équation de la tangente, coordonnées de** A **et** B**, puis différence des ordonnées.)**

Conseils pour le jour J

Exercice 1 : garde les valeurs exactes des produits $(0{,}01847088)$ **pour les calculs intermédiaires et n'arrondis qu'au dix-millième à la fin, sinon la question A.3 ne tombe pas juste ; en partie C, la résolution de** $0{,}35^n \leqslant 10^{-4}$ **passe par le logarithme et le changement de sens de l'inégalité doit être justifié. Exercice 2 : commence par écrire les coordonnées de tous les sommets du pavé dans le repère donné (attention,** $AB = 3$ **mais le vecteur de base est** $\overrightarrow{AI}$**, donc** $B(3;0;0)$**) ; pour la question 5, un projeté orthogonal exige deux conditions, appartenance au plan et vecteur colinéaire au vecteur normal. Exercice 3 : c'est l'exercice le plus rentable (6 points) et très guidé ; la clé de la question 6 est l'identité** $1 - g(x) = (1-x)^2$**. Exercice 4 : précise le domaine grisé dont tu calcules l'aire (entre** $x = 1$ **et** $x = x_0$**) ; la question 4 est ouverte, structure la démarche (tangente, point** A**, point** B**, distance) avant de calculer.**

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).