Corrigé – Bac 2024 – spécialité mathématiques – Amérique du Nord, jour 1

Probabilités conditionnelles et loi binomiale : tirage d'objets, QCM de géométrie dans l'espace, Étude d'une fonction logarithme et convexité, Suite d'intégrales trigonométriques et exponentielles

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Probabilités conditionnelles et loi binomiale : tirage d'objets *(5 pts)*

Partie A

1. Arbre pondéré : depuis la racine, R avec la probabilité 0,07 et $\bar{R}$ avec 0,93. Après R : E avec 0,8 et $\bar{E}$ avec 0,2. Après $\bar{R}$: E avec 0,4 et $\bar{E}$ avec 0,6.

$P(R \cap E) = P(R) \times P_R(E) = 0{,}07 \times 0{,}8 = 0{,}056$. $P(R \cap E) = 0{,}056$**.**

2. R et $\bar{R}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales : $P(E) = P(R \cap E) + P(\bar{R} \cap E) = 0{,}056 + 0{,}93 \times 0{,}4 = 0{,}056 + 0{,}372 = 0{,}428$. **La probabilité de tirer une épée est** $0{,}428$**.**

3. $P_E(R) = \dfrac{P(R \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0{,}056}{0{,}428} \approx 0{,}131$. **Sachant que le joueur a tiré une épée, la probabilité que ce soit un objet rare est environ** $0{,}131$**.**

Partie B

1. On répète 30 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « l'objet tiré est rare », de probabilité 0,07 ; X compte le nombre de succès. X **suit la loi binomiale** $\mathcal{B}(30 ; 0{,}07)$, d'espérance $E(X) = np = 30 \times 0{,}07 = 2{,}1$: en moyenne, un joueur obtient 2,1 objets rares en 30 défis.

2. $P(X < 6) = P(X \leqslant 5) \approx 0{,}984$ (calculatrice). $P(X < 6) \approx 0{,}984$**.**

3. $P(X \geqslant k) = 1 - P(X \leqslant k-1)$. À la calculatrice : $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) \approx 1 - 0{,}369 = 0{,}631 \geqslant 0{,}5$ et $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2) \approx 1 - 0{,}649 = 0{,}351 < 0{,}5$. Comme $k \mapsto P(X \geqslant k)$ est décroissante, **la plus grande valeur cherchée est** $k = 2$: un joueur qui remporte 30 défis a plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins 2 objets rares (mais moins d'une chance sur deux d'en obtenir au moins 3).

4. Soit Y le nombre d'objets rares obtenus en N tirages ; par le même raisonnement, Y suit la loi $\mathcal{B}(N ; 0{,}07)$. L'événement « au moins un objet rare » est le contraire de $\{Y = 0\}$, et $P(Y = 0) = 0{,}93^N$. On veut :

$1 - 0{,}93^N \geqslant 0{,}95 \iff 0{,}93^N \leqslant 0{,}05 \iff N \ln(0{,}93) \leqslant \ln(0{,}05)$ (croissance de ln) $\iff N \geqslant \dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}93)}$ (on divise par $\ln(0{,}93) < 0$, ce qui change le sens de l'inégalité).

Or $\dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}93)} \approx 41{,}3$. **Il faut que le ticket d'or permette de tirer au moins** $N = 42$ **objets.** (Contrôle : $1 - 0{,}93^{41} \approx 0{,}949$ et $1 - 0{,}93^{42} \approx 0{,}952$.)

Exercice 2 – QCM de géométrie dans l'espace *(4 pts)*

1. Réponse c. $\overrightarrow{AB}(3;1;-3)$ est un vecteur directeur de (AB). Seule la représentation c a un vecteur directeur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ (c'est $\overrightarrow{AB}$ lui-même) et passe par $A(1;0;3)$ (pour $t=0$). Les représentations a, b, d ont pour vecteurs directeurs $(1;0;3)$, $(4;1;0)$, $(1;0;-3)$, non colinéaires à $\overrightarrow{AB}$.

2. Réponse d. Un point $(x;y;z)$ est sur (d) s'il existe t avec $x=3+4t$, $y=6t$, $z=4-2t$. Pour $R(-3;-9;7)$: $3+4t=-3$ donne $t=-\dfrac{3}{2}$, et alors $y=6\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-9$ et $z=4+3=7$: les trois coordonnées conviennent. Pour M, N, P, l'ordonnée 6 impose $t=1$, qui donne le point $(7;6;2)$, différent de $M(7;6;6)$, $N(3;6;4)$ et $P(4;6;-2)$.

3. Réponse b. (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(4;6;-2)$ et (d') a pour vecteur directeur $\vec{v}(3;-2;1)$, non colinéaires : les droites ne sont ni parallèles ni confondues. Un point commun vérifierait $3+4t=-2+3k$, $6t=-1-2k$, $4-2t=1+k$. La troisième donne $k=3-2t$; la deuxième devient $6t=-7+4t$, soit $t=-\dfrac{7}{2}$ et $k=10$; la première donne alors $3-14=-11$ et $-2+30=28$: contradiction. Les droites ne sont pas sécantes : elles sont **non coplanaires**.

4. Réponse a. Un plan perpendiculaire à (d) a pour vecteur normal $\vec{u}(4;6;-2)$, ou $(2;3;-1)$: son équation est de la forme $2x+3y-z+k=0$. Il passe par $I(2;1;0)$: $4+3+k=0$, $k=-7$, d'où $2x+3y-z-7=0$. (La réponse c a un vecteur normal correct mais I ne vérifie pas l'équation : $8+6+9\neq 0$.)

Exercice 3 – Étude d'une fonction logarithme et convexité *(5 pts)*

Pour $x > 0$, $\ln(x^2) = 2\ln x$, donc $f(x) = 2x\ln x - \dfrac{1}{x}$.

Partie A : lectures graphiques

1. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente (T), qui passe par $A(1;-1)$ et $B(0;-4)$: $f'(1) = \dfrac{-1-(-4)}{1-0} = 3$. $f'(1) = 3$ et, comme (T) coupe l'axe des ordonnées en -4, (T) **:** $y = 3x - 4$.

2. Sur le graphique, la courbe est en dessous de ses tangentes pour $x < 1$ et au-dessus pour $x > 1$: f **semble concave sur** $]0;1]$ **et convexe sur** $[1;+\infty[$. La courbe traverse sa tangente (T) en A : A **semble être un point d'inflexion** de (C_f).

Partie B : étude analytique

1. *En* $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\ln x = +\infty$ (produit), et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

En 0 : par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to0^+} 2x\ln x = 0$; et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.

2. a) $(2x\ln x)' = 2\ln x + 2x \times \dfrac{1}{x} = 2\ln x + 2$ et $\left(-\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x^2}$. $f'(x) = 2\ln x + 2 + \dfrac{1}{x^2}$**.** (Contrôle : $f'(1) = 0 + 2 + 1 = 3$, conforme à la partie A.)

2. b) $f''(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2x^2-2}{x^3} = \dfrac{2(x^2-1)}{x^3}$. $f''(x) = \dfrac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$**.**

3. a) Sur $]0;+\infty[$, $x^3 > 0$ et $x + 1 > 0$, donc $f''(x)$ a le signe de $x - 1$: $f''(x) \leqslant 0$ sur $]0;1]$ et $f''(x) \geqslant 0$ sur $[1;+\infty[$. f **est concave sur** $]0;1]$**, convexe sur** $[1;+\infty[$**, et** $A(1;-1)$ **est un point d'inflexion** (f'' s'y annule en changeant de signe), ce qui confirme la lecture graphique.

3. b) f'' est la dérivée de f' : f' **est décroissante sur** $]0;1]$ **et croissante sur** $[1;+\infty[$. Elle admet donc un minimum en 1, $f'(1) = 3 > 0$. Ainsi, pour tout $x > 0$, $f'(x) \geqslant 3 > 0$: f' **est strictement positive et** f **est strictement croissante sur** $]0;+\infty[$.

4. a) f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, avec $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation** $f(x) = 0$ **admet une unique solution** α **dans** $]0;+\infty[$.

4. b) À la calculatrice, $f(1{,}325) \approx -0{,}009 < 0$ et $f(1{,}335) \approx 0{,}022 > 0$, donc $\alpha \approx 1{,}33$ (au centième ; $\alpha \approx 1{,}328$).

$f(\alpha) = 0$ s'écrit $\alpha\ln(\alpha^2) = \dfrac{1}{\alpha}$, soit, en divisant par $\alpha > 0$, $\ln(\alpha^2) = \dfrac{1}{\alpha^2}$. En appliquant la fonction exponentielle : $\alpha^2 = \exp\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$. α **vérifie bien** $\alpha^2 = \exp\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$**.**

Exercice 4 – Suite d'intégrales trigonométriques et exponentielles *(6 pts)*

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi} e^0 \sin x \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1$. $\boldsymbol{I_0 = 2}$**.**

2. a) Pour tout $x \in [0;\pi]$, $\sin x \geqslant 0$ et $e^{-nx} > 0$, donc $e^{-nx}\sin x \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre $0 \leqslant \pi$), $I_n \geqslant 0$.

2. b) Par linéarité, $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(e^{-(n+1)x} - e^{-nx}\right)\sin x \, dx = \int_0^{\pi} e^{-nx}\left(e^{-x} - 1\right)\sin x \, dx$. Pour $x \in [0;\pi]$: $e^{-x} \leqslant 1$ donc $e^{-x} - 1 \leqslant 0$, tandis que $e^{-nx} > 0$ et $\sin x \geqslant 0$; l'intégrande est donc négative et $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

2. c) La suite (I_n) est décroissante (2.b) et minorée par 0 (2.a). D'après le théorème de convergence monotone, (I_n) **converge**.

3. a) Pour tout $x \in [0;\pi]$, $\sin x \leqslant 1$ et $e^{-nx} > 0$, donc $e^{-nx}\sin x \leqslant e^{-nx}$. Par croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant), $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx$.

3. b) Pour $n \geqslant 1$, une primitive de $x \mapsto e^{-nx}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{n}e^{-nx}$. Donc $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n}e^{-n\pi} + \frac{1}{n}$. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx = \boldsymbol{\frac{1 - e^{-n\pi}}{n}}$**.**

3. c) Pour $n \geqslant 1$: $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1 - e^{-n\pi}}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ (car $\$0 \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

4. a) *Première intégration par parties* : $u(x) = e^{-nx}$, $v'(x) = \sin x$, d'où $u'(x) = -ne^{-nx}$, $v(x) = -\cos x$ (fonctions dérivables à dérivées continues sur $[0;\pi]$).

$I_n = [-e^{-nx}\cos x]_0^{\pi} - \displaystyle\int_0^{\pi} (-ne^{-nx})(-\cos x)\,dx = \left(-e^{-n\pi}\cos\pi\right) - \left(-e^0\cos 0\right) - n\int_0^{\pi} e^{-nx}\cos x\,dx = e^{-n\pi} + 1 - nJ_n$.

$\boldsymbol{I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n}$**.**

Deuxième intégration par parties : $u(x) = \sin x$, $v'(x) = e^{-nx}$, d'où $u'(x) = \cos x$, $v(x) = -\dfrac{1}{n}e^{-nx}$ (pour $n \geqslant 1$).

$I_n = \left[-\dfrac{1}{n}e^{-nx}\sin x\right]_0^{\pi} + \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-nx}\cos x\,dx = 0 - 0 + \dfrac{1}{n}J_n$ car $\sin\pi = \sin 0 = 0$.

$\boldsymbol{I_n = \dfrac{1}{n}J_n}$**.**

4. b) De la seconde relation, $J_n = nI_n$. En reportant dans la première : $I_n = 1 + e^{-n\pi} - n \times nI_n$, soit $I_n(1 + n^2) = 1 + e^{-n\pi}$, d'où $I_n = \dfrac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$ pour tout $n \geqslant 1$. (Contrôle : $I_n \leqslant \dfrac{2}{n^2+1} \to 0$, cohérent avec 3.c.)

5. La ligne 5 est la condition de la boucle : ***while I >= 0.1 :***

Explication : la variable I vaut $I_0 = 2$ au départ ; tant que I_n n'est pas strictement inférieure à 0,1, on passe au rang suivant (ligne 6) et on calcule I_n avec la formule de la question 4.b (ligne 7). La fonction renvoie le premier rang n tel que $I_n < 0{,}1$. Attention au piège : $I_3 = \dfrac{1 + e^{-3\pi}}{10} \approx 0{,}10001$ est très légèrement supérieur à 0,1, donc la fonction renvoie $n = 4$ ($I_4 \approx 0{,}059$).

Conseils pour le jour J

Exercice 1 : la question B.3 (« plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0{,}5$ ») se traite en écrivant $P(X \geqslant k) = 1 - P(X \leqslant k-1)$ et en testant $k = 2$ et $k = 3$ à la calculatrice ; présente les deux valeurs pour justifier. La question B.4 attend une résolution complète avec le logarithme, y compris le changement de sens de l'inégalité. Exercice 2 : même sans justification demandée, vérifie chaque réponse par un calcul rapide au brouillon (point sur une droite, produit scalaire), une réponse fausse ne coûte rien mais ne rapporte rien. Exercice 3 : simplifie d'abord $\ln(x^2) = 2\ln x$, cela allège tous les calculs ; la question B.3.b est la question clé (le minimum de f' vaut $3 > 0$), elle enchaîne convexité et variations. Exercice 4 : les deux intégrations par parties de la question 4.a doivent être rédigées avec les fonctions u, u', v, v' explicites ; le script Python cache un piège numérique (I_3 est à peine supérieure à 0,1), mais seule la condition « while I >= 0.1 » est demandée.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).