Corrigé – Bac 2023 – spécialité mathématiques – Métropole, Mayotte, Antilles Guyane, jour 2

QCM : probabilités conditionnelles et loi binomiale d'un jeu vidéo, Suites géométrique et logistique : évolution d'une population d'insectes, Géométrie dans l'espace : plans perpendiculaires et projetés orthogonaux, Étude d'une fonction logarithme-exponentielle et convexité

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – QCM : probabilités conditionnelles et loi binomiale d'un jeu vidéo *(5 pts)*

Données de l'énoncé : $P(A) = \dfrac{2}{5}$, $P_A(G) = \dfrac{7}{10}$ et $P(G) = \dfrac{12}{25}$.

1. Réponse c : $\dfrac{7}{25}$. $P(A \cap G) = P(A) \times P_A(G) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{7}{10} = \dfrac{14}{50} = \dfrac{7}{25}$.

2. Réponse b : $\dfrac{1}{3}$. A et B forment une partition : $P(B \cap G) = P(G) - P(A \cap G) = \dfrac{12}{25} - \dfrac{7}{25} = \dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5}$, et $P(B) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$. Donc $P_B(G) = \dfrac{P(B \cap G)}{P(B)} = \dfrac{1/5}{3/5} = \dfrac{1}{3}$.

3. Réponse c : 0,188. Le nombre X de parties gagnées suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10; \dfrac{12}{25}\right)$ (10 répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $0{,}48$). $P(X = 6) = \binom{10}{6} \times 0{,}48^6 \times 0{,}52^4 \approx 0{,}1878 \approx 0{,}188$.

4. Réponse b : $n = 3$. À la calculatrice, $P(X \leqslant 3) \approx 0{,}207$ (tandis que $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}070$ et $P(X \leqslant 4) \approx 0{,}427$).

5. Réponse d : $1 - \left(\dfrac{13}{25}\right)^{10}$. « Gagner au moins une partie » est le contraire de « perdre les 10 parties », de probabilité $\left(1 - \dfrac{12}{25}\right)^{10} = \left(\dfrac{13}{25}\right)^{10}$.

Exercice 2 – Suites géométrique et logistique : évolution d'une population d'insectes *(5 pts)*

Partie A : premier modèle

1. Augmenter de $60\,\%$ revient à multiplier par $1+\dfrac{60}{100}=1{,}6$. Donc pour tout n, $u_{n+1}=1{,}6u_n$: (u_n) est géométrique de raison $1{,}6$ et de premier terme $u_0=0{,}1$, d'où $u_n=0{,}1\times 1{,}6^n$.

2. Comme $1{,}6>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}1{,}6^n=+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

3. $u_n>0{,}4 \iff 0{,}1\times 1{,}6^n>0{,}4 \iff 1{,}6^n>4 \iff n\ln(1{,}6)>\ln 4 \iff n>\dfrac{\ln 4}{\ln 1{,}6}$ (car $\ln 1{,}6>0$). Or $\dfrac{\ln 4}{\ln 1{,}6}\approx 2{,}95$. **Le plus petit entier est** $n=3$ ($u_3=0{,}4096>0{,}4$ et $u_2=0{,}256$).

4. Non. Dès le troisième mois, la population dépasse $400\,000$ insectes ($u_3\approx 409\,600$), et elle tend vers $+\infty$: selon ce modèle, l'équilibre du milieu ne serait pas préservé.

Partie B : second modèle

1. $v_1=1{,}6\times 0{,}1-1{,}6\times 0{,}1^2=0{,}16-0{,}016=0{,}144$. **Au bout d'un mois, il y a** $144\,000$ **insectes.**

2. a) $f(x)=x \iff 1{,}6x-1{,}6x^2=x \iff 0{,}6x-1{,}6x^2=0 \iff x(0{,}6-1{,}6x)=0 \iff x=0$ ou $x=\dfrac{0{,}6}{1{,}6}=\dfrac{3}{8}$. **Les solutions sont** 0 **et** $\dfrac{3}{8}=0{,}375$**.**

2. b) $f'(x)=1{,}6-3{,}2x$, et $f'(x)\geqslant 0 \iff x\leqslant\dfrac{1{,}6}{3{,}2}=\dfrac{1}{2}$. Donc f **est croissante sur** $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.

3. a) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $0\leqslant v_n\leqslant v_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$ ».

Initialisation : $v_0=0{,}1$ et $v_1=0{,}144$: $0\leqslant 0{,}1\leqslant 0{,}144\leqslant\dfrac{1}{2}$.

Hérédité : soit n tel que $0\leqslant v_n\leqslant v_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$. Comme f est croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$: $f(0)\leqslant f(v_n)\leqslant f(v_{n+1})\leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, soit $0\leqslant v_{n+1}\leqslant v_{n+2}\leqslant 0{,}4$, et $0{,}4\leqslant\dfrac{1}{2}$ (car $f(0)=0$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0{,}8-0{,}4=0{,}4$). Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : **pour tout entier naturel** n**,** $0\leqslant v_n\leqslant v_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$**.**

3. b) La suite (v_n) est croissante et majorée par $\dfrac{1}{2}$: d'après le théorème de convergence monotone, (v_n) **converge**.

3. c) ℓ est solution de $f(x)=x$, donc $\ell=0$ ou $\ell=\dfrac{3}{8}$. Comme la suite est croissante, $\ell\geqslant v_0=0{,}1>0$, donc $\ell=\dfrac{3}{8}=0{,}375$. La population tend vers $375\,000$ insectes et, la suite étant croissante, $v_n\leqslant\ell<0{,}4$ pour tout n : **le nombre d'insectes ne dépasse jamais** $400\,000$**, l'équilibre est préservé.**

4. a) La boucle continue tant que $v<0{,}4$. Or, pour tout n, $v_n\leqslant 0{,}375<0{,}4$: la condition est toujours vraie et **la boucle ne s'arrête jamais : seuil(0.4) ne renvoie rien (le programme tourne indéfiniment)**.

4. b) La fonction renvoie le plus petit n tel que $v_n\geqslant 0{,}35$. En calculant les termes : $v_1=0{,}144$, $v_2\approx 0{,}197$, $v_3\approx 0{,}253$, $v_4\approx 0{,}302$, $v_5\approx 0{,}337$, $v_6\approx 0{,}358$. **seuil(0.35) renvoie** 6 : c'est au bout de 6 mois que la

population atteint pour la première fois 350 000 insectes.

Exercice 3 – Géométrie dans l'espace : plans perpendiculaires et projetés orthogonaux *(5 pts)*

1. a) Les coefficients de l'équation $2x + y - z + 2 = 0$ donnent $\vec{n}_1(2;1;-1)$, vecteur normal à $\mathcal{P}_1$.

1. b) $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 0$. Les vecteurs normaux sont orthogonaux : $\mathcal{P}_1$ **et** $\mathcal{P}_2$ **sont perpendiculaires.**

2. a) $\mathcal{P}_2$ a une équation de la forme $x - y + z + k = 0$; avec $B(1;1;2) : 1 - 1 + 2 + k = 0$, $k = -2$. $\mathcal{P}_2$ **:** $x - y + z - 2 = 0$**.**

2. b) Soit $M(0;-2+t;t)$ un point de Δ. Dans $\mathcal{P}_1 : 0 + (-2+t) - t + 2 = 0$, vrai pour tout t. Dans $\mathcal{P}_2 : 0 - (-2+t) + t - 2 = 0$, vrai pour tout t. Donc Δ est incluse dans $\mathcal{P}_1$ et dans $\mathcal{P}_2$. Les deux plans ne sont pas parallèles (vecteurs normaux non colinéaires), donc leur intersection est une droite ; comme elle contient Δ, $\Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

3. a) $\overrightarrow{AM_t}(-1;-3+t;t-1)$, donc $AM_t^2 = 1 + (t-3)^2 + (t-1)^2 = 1 + t^2 - 6t + 9 + t^2 - 2t + 1 = 2t^2 - 8t + 11$. $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$**.**

3. b) H est le point de Δ le plus proche de A : AH est le minimum de AM_t. Le trinôme $2t^2 - 8t + 11$ (coefficient dominant positif) atteint son minimum en $t = \dfrac{8}{4} = 2$, où il vaut $8 - 16 + 11 = 3$. Donc $AH = \sqrt{3}$, atteint pour $H = M_2(0;0;2)$.

4. a) $\mathcal{D}_1$ passe par $A(1;1;1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{n}_1(2;1;-1)$: $x = 1 + 2t$**,** $y = 1 + t$**,** $z = 1 - t$**,** $t \in \mathbb{R}$**.**

4. b) H_1 est le point de $\mathcal{D}_1$ situé dans $\mathcal{P}_1 : 2(1+2t) + (1+t) - (1-t) + 2 = 0$, soit $6t + 4 = 0$, $t = -\dfrac{2}{3}$. D'où $H_1\left(1 - \dfrac{4}{3}; 1 - \dfrac{2}{3}; 1 + \dfrac{2}{3}\right)$, soit $H_1\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$.

5. $\overrightarrow{AH_1}\left(-\dfrac{4}{3}; -\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$ et $\overrightarrow{H_2H}\left(0 - \dfrac{4}{3}; 0 - \dfrac{2}{3}; 2 - \dfrac{4}{3}\right) = \left(-\dfrac{4}{3}; -\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$. Comme $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{H_2H}$, AH_1HH_2 **est un parallélogramme**.

De plus $\overrightarrow{AH_2}\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{AH_1} \cdot \overrightarrow{AH_2} = -\dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{9} = 0$: l'angle en A est droit. Un parallélogramme ayant un angle droit est un rectangle : AH_1HH_2 **est un rectangle.** (Contrôle : $AH_1^2 + AH_2^2 = \dfrac{24}{9} + \dfrac{3}{9} = 3 = AH^2$.)

Exercice 4 – Étude d'une fonction logarithme-exponentielle et convexité *(5 pts)*

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+e^{-x})=+\infty$ et, par composition avec $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

1. b) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-x})=1$ et, par continuité de ln en 1, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ln 1=0$. Graphiquement, **l'axe des abscisses est asymptote horizontale à C en $+\infty$.**

1. c) $f=\ln u$ avec $u(x)=1+e^{-x}>0$ et $u'(x)=-e^{-x}$, donc $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$. En multipliant numérateur et dénominateur par e^{x} : $f'(x)=\dfrac{-1}{e^{x}+1}$. $f'(x)=\dfrac{-1}{1+e^{x}}$**.**

1. d) $1+e^{x}>0$ donc $f'(x)<0$ pour tout réel x : **f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$**, de $+\infty$ (en $-\infty$) vers 0 (en $+\infty$).

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	décroissante	0

2. a) $f(0)=\ln 2$ et $f'(0)=\dfrac{-1}{2}$. T_0 **:** $y=-\dfrac{1}{2}x+\ln 2$**.**

2. b) $f'(x)=-(1+e^{x})^{-1}$ donc $f''(x)=-\left(-\dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}\right)=\dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}>0$ pour tout réel x. **f'' est strictement positive sur $\mathbb{R}$: f est convexe sur $\mathbb{R}$.**

2. c) La courbe d'une fonction convexe est au-dessus de chacune de ses tangentes. En particulier, C est au-dessus de T_0 : **pour tout réel x, $f(x)\geqslant -\dfrac{1}{2}x+\ln 2$.**

3. a) $f(x)-f(-x)=\ln(1+e^{-x})-\ln(1+e^{x})=\ln\dfrac{1+e^{-x}}{1+e^{x}}$. Or $1+e^{-x}=e^{-x}(e^{x}+1)$, donc $\dfrac{1+e^{-x}}{1+e^{x}}=e^{-x}$ et $\ln(e^{-x})=-x$. **Pour tout réel x, $f(x)-f(-x)=-x$.**

3. b) Le coefficient directeur de (M_aN_a) est $\dfrac{f(a)-f(-a)}{a-(-a)}=\dfrac{-a}{2a}=-\dfrac{1}{2}$ (car $a\neq 0$). C'est aussi le coefficient directeur de T_0. **Les droites T_0 et (M_aN_a) sont donc parallèles.**

Conseils pour le jour J

Exercice 1 : les données sont des fractions, garde-les sous cette forme jusqu'au bout ($P(A\cap G)=\frac{7}{25}$, $P_B(G)=\frac{1}{3}$) et n'utilise la calculatrice que pour les questions 3 et 4 (loi binomiale $\mathcal{B}(10;0{,}48)$). Exercice 2 : la question B.4.a est un piège classique : la boucle ne se termine pas car la suite est majorée par sa limite $0{,}375<0{,}4$; dis-le explicitement. La récurrence B.3.a doit utiliser la croissance de f sur $[0;\frac{1}{2}]$ et la valeur $f(\frac{1}{2})=0{,}4$. Exercice 3 : pour montrer qu'une droite est l'intersection de deux plans, vérifie qu'elle est incluse dans chacun et que les plans sont sécants ; pour le rectangle de la question 5, montre d'abord l'égalité de deux vecteurs (parallélogramme) puis un angle droit. Exercice 4 : la dérivée se simplifie en multipliant par e^{x}, et l'inégalité 2.c découle directement de la convexité (courbe au-dessus de la tangente) : cite ce résultat plutôt que de refaire une étude de fonction.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).