Corrigé – Bac 2023 – spécialité mathématiques – Métropole, Mayotte, Antilles Guyane, jour 1

QCM : probabilités conditionnelles et loi binomiale, Étude d'une fonction logarithme et famille de fonctions, Suites récurrente et exponentielle : évolution d'une FAQ, Géométrie dans l'espace : cube et volume d'un tétraèdre

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – QCM : probabilités conditionnelles et loi binomiale *(5 pts)*

Données : $P(G) = 0{,}2$, $P(G \cap D) = 0{,}002$, $P(D) = 0{,}082$.

1. Réponse b. $P_G(D) = \dfrac{P(G \cap D)}{P(G)} = \dfrac{0{,}002}{0{,}2} = 0{,}01$.

2. Réponse b. G et $\bar{G}$ forment une partition, donc $P(D) = P(G \cap D) + P(\bar{G} \cap D)$, d'où $P(\bar{G} \cap D) = 0{,}082 - 0{,}002 = 0{,}08$.

3. Réponse b. $P_D(G) = \dfrac{P(G \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}002}{0{,}082} \approx 0{,}024$.

4. Réponse b. Avec $X \sim \mathcal{B}(50 ; 0{,}082)$: $P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2) \approx 1 - 0{,}211 = 0{,}789$ (calculatrice).

5. Réponse c. La probabilité que les n machines fonctionnent toutes est $P(X = 0) = 0{,}918^n$ (indépendance). $0{,}918^n > 0{,}4 \iff n \ln(0{,}918) > \ln(0{,}4) \iff n < \dfrac{\ln(0{,}4)}{\ln(0{,}918)} \approx 10{,}7$ (division par un nombre négatif). La plus grande valeur possible est $n = 10$ (contrôle : $0{,}918^{10} \approx 0{,}425 > 0{,}4$ et $0{,}918^{11} \approx 0{,}390 < 0{,}4$).

Exercice 2 – Étude d'une fonction logarithme et famille de fonctions *(5 pts)*

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (-8\ln x) = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

2. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - 8\dfrac{\ln x}{x^2}\right) = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. $f'(x) = 2x - \dfrac{8}{x} = \dfrac{2x^2 - 8}{x}$. $f'(x) = \dfrac{2(x^2-4)}{x}$**.**

4. Sur $]0;+\infty[$, $x > 0$ donc $f'(x)$ a le signe de $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, c'est-à-dire de $x - 2$ (car $x + 2 > 0$). f **est strictement décroissante sur** $]0;2]$ **et strictement croissante sur** $[2;+\infty[$**.** Son minimum est $f(2) = 4 - 8\ln 2 \approx -1{,}55$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	décroissante	$4-8\ln 2$	croissante	$+\infty$

5. Sur $]0;2]$, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante, avec $\lim\limits_{0^+} f = +\infty > 0$ et $f(2) = 4 - 8\ln 2 < 0$ (car $\ln 2 \approx 0{,}69 > 0{,}5$). D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation** $f(x) = 0$ **admet une unique solution** α **sur** $]0;2]$.

6. D'après le tableau de variations et les zéros $\alpha \in]0;2[$ et $\beta \in]2;+\infty[$: $f(x) > 0$ **sur** $]0;\alpha[$**,** $f(x) < 0$ **sur** $]\alpha;\beta[$ **,** $f(x) > 0$ **sur** $]\beta;+\infty[$**, et** $f(\alpha) = f(\beta) = 0$**.**

7. $g_k(x) = f(x) + k$. La fonction g_k a les mêmes variations que f et son minimum sur $]0;+\infty[$ est $g_k(2) = 4 - 8\ln 2 + k$. Donc g_k est positive sur $]0;+\infty[$ si et seulement si $4 - 8\ln 2 + k \geqslant 0$, soit $k \geqslant 8\ln 2 - 4$. **La plus petite valeur est** $k = 8\ln 2 - 4 \approx 1{,}55$**.**

Exercice 3 – Suites récurrente et exponentielle : évolution d'une FAQ *(5 pts)*

Partie A

1. $u_2 = 0{,}9 \times 3 + 1{,}3 = 4$ et $u_3 = 0{,}9 \times 4 + 1{,}3 = 4{,}9$. **Selon ce modèle, la FAQ contient** 400 **questions le deuxième mois et** 490 **le troisième mois.**

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^n$.

Initialisation : $13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9 = 13 - 10 = 3 = u_1$.

Hérédité : soit $n \geqslant 1$ tel que $u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^n$. Alors $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}3 = 0{,}9 \times 13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1} + 1{,}3 = 11{,}7 + 1{,}3 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1} = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1}$.

Conclusion : **pour tout** $n \geqslant 1$**,** $u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^n$**.**

3. $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1} + \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^n = \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^n(1 - 0{,}9) = \dfrac{10}{9} \times 0{,}9^n > 0$. **La suite** (u_n) **est croissante.**

4. La fonction renvoie le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $u_n > p$ (tant que $u_n \leqslant p$, on calcule le terme suivant). Pour $p = 8{,}5$: $u_n > 8{,}5 \iff \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^n < 4{,}5 \iff 0{,}9^n < 0{,}405 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}405}{\ln 0{,}9} \approx 8{,}6$. Donc **seuil(8.5) renvoie** 9 ($u_8 \approx 8{,}22$ et $u_9 \approx 8{,}70$) : d'après ce modèle, c'est au neuvième mois que la FAQ dépasse pour la première fois 850 questions.

Partie B

1. $v_1 = 9 - 6e^0 = 3$ et $v_2 = 9 - 6e^{-0{,}19} \approx 4{,}04$. $v_1 = 3$ **et** $v_2 \approx 4{,}04$**.**

2. $v_n > 8{,}5 \iff 6e^{-0{,}19(n-1)} < 0{,}5 \iff e^{-0{,}19(n-1)} < \dfrac{1}{12} \iff -0{,}19(n-1) < -\ln 12$ (stricte croissance de $\ln$) $\iff n - 1 > \dfrac{\ln 12}{0{,}19} \iff n > 1 + \dfrac{\ln 12}{0{,}19} \approx 14{,}08$.

La plus petite valeur est $n = 15$ ($v_{14} \approx 8{,}49$ et $v_{15} \approx 8{,}58$).

Partie C

1. Le seuil de 850 questions ($8{,}5$ centaines) est dépassé au 9^{e} mois avec la première modélisation et au 15^{e} mois avec la seconde. **La première modélisation (suite** (u_n)**) conduit à modifier le site le plus tôt.**

2. Comme $0 < 0{,}9 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 13$. Et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-0{,}19(n-1)} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 9$. **À long terme, la première modélisation prévoit environ** 1300 **questions contre** 900 **pour la seconde : c'est la première qui donne le plus grand nombre de questions.**

Exercice 4 – Géométrie dans l'espace : cube et volume d'un tétraèdre *(5 pts)*

1. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$: $E(0;0;1)$**,** $C(1;1;0)$**,** $G(1;1;1)$ (et $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$).

2. $\overrightarrow{EC}(1;1;-1)$ dirige la droite (EC), qui passe par E : (EC) **:** $x = t$**,** $y = t$**,** $z = 1 - t$**,** $t \in \mathbb{R}$**.**

3. $\overrightarrow{GB}(0;-1;-1)$ et $\overrightarrow{GD}(-1;0;-1)$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (GBD). $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{GB} = 0 - 1 + 1 = 0$ et $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{GD} = -1 + 0 + 1 = 0$. Une droite orthogonale à deux droites sécantes d'un plan est orthogonale à ce plan : (EC) **est orthogonale au plan** (GBD).

4. a) D'après la question 3, $\overrightarrow{EC}(1;1;-1)$ est normal à (GBD), qui a donc une équation de la forme $x + y - z + k = 0$. Avec $G(1;1;1)$: $1 + 1 - 1 + k = 0$, $k = -1$. (GBD) **:** $x + y - z - 1 = 0$**.** (Contrôle : B : $1 - 1 = 0$; D : $1 - 1 = 0$.)

4. b) Le point de (EC) de paramètre t est dans le plan si $t + t - (1 - t) - 1 = 0$, soit $3t - 2 = 0$, $t = \dfrac{2}{3}$. $I\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$**.**

4. c) La droite $(EI) = (EC)$ est orthogonale au plan (GBD) et I appartient à ce plan : I est le projeté orthogonal de E sur (GBD), et la distance cherchée est EI. $\overrightarrow{EI}\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$ donc $EI = \sqrt{3 \times \dfrac{4}{9}} = \sqrt{\dfrac{12}{9}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **La distance de** E **au plan** (GBD) **est** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$**.**

5. a) $BD = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$, $BG = \sqrt{0 + 1 + 1} = \sqrt{2}$, $DG = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$ (diagonales de faces du cube). **Le triangle** BDG **est équilatéral.**

5. b) $J\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; 0\right)$. Dans un triangle équilatéral, la médiane (GJ) est aussi une hauteur. $GJ = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 1} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Aire $= \dfrac{1}{2} \times BD \times GJ = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\sqrt{12}}{4} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4}$. **L'aire de** BDG **est** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$**.**

6. On prend BDG comme base ; la hauteur issue de E est la distance de E au plan (GBD), soit $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (question 4.c). $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2 \times 3}{6} = \dfrac{1}{3}$. **Le volume du tétraèdre** $EGBD$ **est** $\dfrac{1}{3}$**.** (Contrôle : c'est le volume du cube, 1, moins celui des quatre tétraèdres « coins » de volume $\dfrac{1}{6}$ chacun.)

Conseils pour le jour J

Exercice 1 : un QCM sans justification, mais chaque réponse demande un petit calcul au brouillon ; attention à la question 2, qui demande $P(\bar{G} \cap D)$ et non $P(G \cap D)$, et à la question 5, où l'on cherche la plus grande valeur de n (arrondir vers le bas). Exercice 2 : le tableau de variations est le cœur de l'exercice ; la valeur exacte du minimum $4 - 8\ln 2$ est réutilisée à la question 7, et le signe de f (question 6) se déduit uniquement du tableau et des deux zéros. Exercice 3 : trois parties courtes ; la récurrence de A.2 doit être rédigée avec initialisation à $n = 1$ (et non 0), et la partie C se résume en deux phrases appuyées sur les résultats précédents. Exercice 4 : le point clé est de reconnaître que I est le projeté orthogonal de E sur (GBD), ce qui donne la distance à la question 4.c et la hauteur à la question 6 ; connais le résultat classique de la diagonale du cube orthogonale au plan (GBD).

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).