Corrigé – Bac 2023 – spécialité mathématiques – Amérique du Nord, jour 1

Probabilités conditionnelles et loi binomiale : tri des déchets, Étude d'une fonction exponentielle et fonction auxiliaire, QCM de géométrie dans l'espace, Suite récurrente : méthode de Héron pour une racine carrée

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Probabilités conditionnelles et loi binomiale : tri des déchets *(5 pts)*

Partie A

1. Arbre : depuis la racine, M (0,69), N (0,28) et D ($1 - 0{,}69 - 0{,}28 = 0{,}03$). Après M : R (0,73) et $\bar{R}$ (0,27). Après N : R (0,49) et $\bar{R}$ (0,51). Après D : R (0,35) et $\bar{R}$ (0,65).

2. $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0{,}03 \times 0{,}35 = 0{,}0105$. **La probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est** $0{,}0105$**.**

3. $P(M \cap \bar{R}) = P(M) \times P_M(\bar{R}) = 0{,}69 \times 0{,}27 = 0{,}1863$. $P(M \cap \bar{R}) = 0{,}1863$: 18,63 % des déchets de l'entreprise sont minéraux, non dangereux et non recyclables.

4. M, N, D forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales : $P(R) = P(M \cap R) + P(N \cap R) + P(D \cap R) = 0{,}69 \times 0{,}73 + 0{,}28 \times 0{,}49 + 0{,}0105 = 0{,}5037 + 0{,}1372 + 0{,}0105 = 0{,}6514$. $P(R) = 0{,}6514$**.**

5. $P_R(N) = \dfrac{P(N \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0{,}1372}{0{,}6514} \approx 0{,}2106$. **Sachant que le déchet est recyclable, la probabilité qu'il soit non minéral et non dangereux est environ** $0{,}2106$**.**

Partie B

1. a) On répète 20 fois de façon identique et indépendante (tirage avec remise) une épreuve de Bernoulli de succès « le déchet est recyclable », de probabilité 0,6514. X **suit la loi binomiale de paramètres** $n = 20$ **et** $p = 0{,}6514$**.**

1. b) $P(X = 14) = \binom{20}{14} \times 0{,}6514^{14} \times 0{,}3486^{6} \approx 0{,}1723$. **La probabilité d'obtenir exactement** 14 **déchets recyclables est environ** $0{,}1723$**.**

2. a) Les n prélèvements sont indépendants et chaque déchet est non recyclable avec la probabilité $1 - 0{,}6514 = 0{,}3486$. $p_n = 0{,}3486^n$**.**

2. b) La probabilité qu'au moins un déchet soit recyclable est $1 - p_n = 1 - 0{,}3486^n$. On résout :

$$1 - 0{,}3486^n \geqslant 0{,}9999 \iff 0{,}3486^n \leqslant 0{,}0001 \iff n \ln(0{,}3486) \leqslant \ln(0{,}0001) \iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}3486)}$$

(division par $\ln(0{,}3486) < 0$, qui change le sens de l'inégalité).

Or $\dfrac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}3486)} \approx 8{,}74$. **À partir de** $n = 9$ **déchets, la probabilité qu'au moins un soit recyclable est supérieure ou égale à** $0{,}9999$**.**

Exercice 2 – Étude d'une fonction exponentielle et fonction auxiliaire *(5 pts)*

Partie A : fonction auxiliaire $g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x-3) = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

1. b) Pour $x \neq 0$, $g(x) = e^{2x}\left(3 - \dfrac{2x}{e^{2x}} - \dfrac{3}{e^{2x}}\right)$. En posant $X = 2x \to +\infty$, $\dfrac{2x}{e^{2x}} = \dfrac{X}{e^X} \to 0$ par croissances comparées, et $\dfrac{3}{e^{2x}} \to 0$. La parenthèse tend vers 3 et $e^{2x} \to +\infty$: par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2. a) $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, donc $g'(x) = 3 \times 2e^{2x} - 2$. $g'(x) = 6e^{2x} - 2$**.**

2. b) $g'(x) > 0 \iff 6e^{2x} > 2 \iff e^{2x} > \dfrac{1}{3} \iff 2x > \ln\dfrac{1}{3} = -\ln 3 \iff x > -\dfrac{\ln 3}{2}$ (stricte croissance de ln). $g'(x) < 0$ **sur** $\left]-\infty; -\dfrac{\ln 3}{2}\right[$**,** $g'\left(-\dfrac{\ln 3}{2}\right) = 0$ **et** $g'(x) > 0$ **sur** $\left]-\dfrac{\ln 3}{2}; +\infty\right[$**.**

2. c) g est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\dfrac{\ln 3}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\ln 3}{2}; +\infty\right[$, avec des limites $+\infty$ aux deux bornes. Son minimum est $g\left(-\dfrac{\ln 3}{2}\right) = 3e^{-\ln 3} + \ln 3 - 3 = 3 \times \dfrac{1}{3} + \ln 3 - 3 = \ln 3 - 2$. **Le minimum de g vaut** $\ln 3 - 2 \approx -0{,}90$**.**

x	$-\infty$		$-\dfrac{\ln 3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	décroissante	$\ln 3 - 2$	croissante	$+\infty$

3. a) $g(0) = 3e^0 - 0 - 3 = 3 - 3 = 0$. 0 **est solution de** $g(x) = 0$**.**

3. b) Sur $\left]-\infty; -\dfrac{\ln 3}{2}\right]$, g est continue, strictement décroissante, avec $\lim\limits_{-\infty} g = +\infty$ et $g\left(-\dfrac{\ln 3}{2}\right) = \ln 3 - 2 < 0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle, et $\alpha \neq 0$ car $0 > -\dfrac{\ln 3}{2}$. (Sur $\left[-\dfrac{\ln 3}{2}; +\infty\right[$, g est strictement croissante et s'annule seulement en 0.)

$g(-1{,}5) = 3e^{-3} \approx 0{,}149 > 0$ et $g(-1{,}4) = 3e^{-2{,}8} - 0{,}2 \approx -0{,}018 < 0$, donc $-1{,}5 < \alpha < -1{,}4$.

4. D'après le tableau de variations et les deux zéros α et 0 : $g(x) > 0$ **sur** $]-\infty; \alpha[$**,** $g(x) < 0$ **sur** $]\alpha; 0[$**,** $g(x) > 0$ **sur** $]0; +\infty[$**, et** $g(\alpha) = g(0) = 0$**.**

Partie B : étude de $f(x) = e^{3x} - (2x+1)e^x$

1. $(e^{3x})' = 3e^{3x}$ et $((2x+1)e^x)' = 2e^x + (2x+1)e^x = (2x+3)e^x$. Donc $f'(x) = 3e^{3x} - (2x+3)e^x = e^x\left(3e^{2x} - 2x - 3\right)$ (car $e^{3x} = e^x e^{2x}$). $f'(x) = e^x g(x)$**.**

2. $e^x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $g(x)$: f **est croissante sur** $]-\infty; \alpha]$**, décroissante sur** $[\alpha; 0]$ **et croissante sur** $[0; +\infty[$ (f' s'annule en α et en 0 : maximum local en α, minimum local en 0, $f(0) = 1 - 1 = 0$).

3. Une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ a une dérivée croissante sur $\mathbb{R}$. Or ici f' est positive sur $]-\infty; \alpha[$, puis négative sur $]\alpha; 0[$: f' n'est pas croissante (ou encore : f admet un maximum local en α, ce qu'une fonction convexe ne peut pas avoir, sa courbe étant au-dessus de ses tangentes). **Donc f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.**

Exercice 3 – QCM de géométrie dans l'espace *(5 pts)*

1. Réponse a. $\overrightarrow{AB}(4;4;-2)$, $\overrightarrow{AC}(4;-2;4)$: $AB^2 = 16+16+4 = 36$ et $AC^2 = 16+4+16 = 36$, donc $AB = AC = 6$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 16-8-8 = 0$. Le triangle est isocèle et rectangle en A (et $BC^2 = 0+36+36 = 72 = AB^2+AC^2$).

2. Réponse c. On teste les coordonnées de $B(3;6;3)$, $C(3;0;9)$, $D(8;-3;-8)$: pour $4x+y+z-21=0$, B : $12+6+3-21 = 0$; C : $12+0+9-21 = 0$; D : $32-3-8-21 = 0$. Les trois points vérifient l'équation. (Pour l'équation a, D donne $16-3-8-15 = -10 \neq 0$; pour b, C donne $27+3 \neq 0$; pour d, B donne $33+15-73 \neq 0$.)

3. Réponse b. Le plan (ABC) a pour vecteur normal $\vec{n}(1;-2;-2)$, donc $H = D + t\vec{n}$ a pour coordonnées $(8+t;-3-2t;-8-2t)$. $H \in (ABC)$: $8+t-2(-3-2t)-2(-8-2t)+15 = 0$, soit $9t+45 = 0$, $t=-5$, d'où $H(3;7;2)$. Contrôle : $3-14-4+15 = 0$.

4. Réponse d. (BC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC}(0;-6;6)$ et Δ a pour vecteur directeur $(1;-1;3)$: non colinéaires, donc ni confondues ni parallèles. Un point commun aurait pour abscisse 3 (celle de tous les points de (BC)), soit $t=-2$ sur Δ : le point $(3;5;-7)$. Sur (BC), un point d'ordonnée 5 est $B+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{BC} = (3;5;4)$, de cote $4 \neq -7$. Pas de point commun : les droites sont non coplanaires.

5. Réponse b. Les vecteurs normaux $(2;-1;2)$ et $(1;-2;-2)$ ne sont pas colinéaires : les plans sont sécants. A : $-2-2+10-6 = 0$ et B : $6-6+6-6 = 0$ appartiennent à $\mathcal{P}$ (et à (ABC)), tandis que C : $6-0+18-6 = 18 \neq 0$ n'appartient pas à $\mathcal{P}$. L'intersection est donc la droite (AB).

Exercice 4 – Suite récurrente : méthode de Héron pour une racine carrée *(5 pts)*

Partie A : étude de la suite

1. $u_1 = \dfrac{1}{2}\left(5 + \dfrac{11}{5}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{36}{5} = \dfrac{18}{5}$; $u_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{18}{5} + \dfrac{11 \times 5}{18}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{18}{5} + \dfrac{55}{18}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{324 + 275}{90} = \dfrac{599}{180}$. $u_1 = \dfrac{18}{5}$ **et** $u_2 = \dfrac{599}{180}$ (fractions irréductibles : 599 est premier).

2. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{11}{x^2}\right) = \dfrac{x^2 - 11}{2x^2}$. Pour $x \geqslant \sqrt{11}$, $x^2 \geqslant 11$ donc $f'(x) \geqslant 0$. f **est croissante sur** $[\sqrt{11};+\infty[$**.**

3. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$ ».

Initialisation : $u_0 = 5$, $u_1 = 3{,}6$ et $\sqrt{11} \approx 3{,}317$: on a bien $5 \geqslant 3{,}6 \geqslant \sqrt{11}$ (en effet $3{,}6^2 = 12{,}96 \geqslant 11$).

Hérédité : soit n tel que $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$. Ces nombres sont dans $[\sqrt{11};+\infty[$ où f est croissante, donc $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1}) \geqslant f(\sqrt{11})$. Or $f(\sqrt{11}) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{11} + \dfrac{11}{\sqrt{11}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{11} + \sqrt{11}\right) = \sqrt{11}$. D'où $u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant \sqrt{11}$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : **pour tout entier naturel** n**,** $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$**.**

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{11}$. D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) **converge** vers un réel $a \geqslant \sqrt{11}$.

5. f est continue sur $]0;+\infty[$ et $a > 0$; en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $a = f(a)$, soit $a = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{11}{a}\right)$, soit $2a = a + \dfrac{11}{a}$, soit $a = \dfrac{11}{a}$, soit $a^2 = 11$. Comme $a > 0$, $a = \sqrt{11}$.

Partie B : application géométrique

1. a) L'aire du rectangle R_0 est $L_0 \times \ell_0 = 11$ avec $L_0 = 5$, donc $\ell_0 = \dfrac{11}{5} = 2{,}2$. $\ell_0 = 2{,}2$**.**

1. b) Pour tout n, l'aire de R_n vaut 11 : $L_n \ell_n = 11$, donc $\ell_n = \dfrac{11}{L_n}$ $(L_n \neq 0)$.

2. Pour tout n, $L_{n+1} = \dfrac{L_n + \ell_n}{2} = \dfrac{1}{2}\left(L_n + \dfrac{11}{L_n}\right) = f(L_n)$ et $L_0 = 5 = u_0$. Les suites (L_n) et (u_n) ont le même premier terme et la même relation de récurrence, donc (par récurrence immédiate) $L_n = u_n$ **pour tout entier naturel** n.

3. D'après A.3, $L_n = u_n \geqslant \sqrt{11}$ pour tout n. La fonction inverse étant décroissante sur $]0;+\infty[$, $\ell_n = \dfrac{11}{L_n} \leqslant \dfrac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$. **Pour tout** n**,** $\ell_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_n$**.**

4. La longueur et la largeur de R_n tendent toutes deux vers $\sqrt{11}$: **les rectangles** R_n **se rapprochent du carré d'aire** 11**, de côté** $\sqrt{11}$. C'est la méthode de Héron pour approcher $\sqrt{11}$.

5. a) La boucle effectue 3 itérations : $L_1 = 3{,}6$, $\ell_1 = \dfrac{11}{3{,}6} \approx 3{,}055556$; $L_2 \approx 3{,}327778$, $\ell_2 \approx 3{,}305509$; $L_3 \approx 3{,}316643$, $\ell_3 \approx 3{,}316606$. **heron(3) renvoie** $(3{,}316606\ ;\ 3{,}316643)$, c'est-à-dire ℓ_3 puis L_3 arrondis à 6 décimales.

5. b) Ce sont la largeur et la longueur du rectangle R_3 : elles encadrent $\sqrt{11} \approx 3{,}316625$ ($\ell_3 \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_3$) et fournissent déjà une valeur approchée de $\sqrt{11}$ à 10^{-4} près après seulement trois étapes.

Conseils pour le jour J

Exercice 1 : exercice très classique, à traiter en 35 minutes maximum ; soigne les arrondis demandés (dix-millième) et, en B.2.b, la résolution de l'inéquation avec le logarithme (changement de sens de l'inégalité). Exercice 2 : la fonction auxiliaire g sert à donner le signe de f' ; la difficulté est en A.3.b, où il faut restreindre le corollaire du TVI à l'intervalle où g est monotone, et en A.4, où le signe de g change deux fois (en α et en 0). Pour la non-convexité, un argument suffit : f' n'est pas croissante. Exercice 3 : pour un QCM, teste systématiquement les points dans les équations proposées (question 2) et utilise le paramétrage $H = D + t\vec{n}$ pour un projeté orthogonal (question 3). Exercice 4 : la récurrence de A.3 s'appuie sur la croissance de f sur $[\sqrt{11}; +\infty[$ et sur $f(\sqrt{11}) = \sqrt{11}$; calcule cette valeur explicitement. En partie B, la question 2 demande simplement d'identifier même premier terme et même relation de récurrence.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).