Corrigé – Bac 2022 – spécialité mathématiques – Métropole, La Réunion, Antilles Guyane, jour 2

Probabilités conditionnelles et loi binomiale : test de dépistage animal, QCM : lecture graphique de la dérivée et limites de suites, Géométrie dans l'espace : cube et volume d'un tétraèdre, Étude de deux fonctions modélisant la trajectoire d'une balle de golf

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Probabilités conditionnelles et loi binomiale : test de dépistage animal *(7 pts)*

Partie A

1. Arbre : depuis la racine, M (0,7) et $\bar{M}$ (0,3). Après M : T (0,97) et $\bar{T}$ (0,03). Après $\bar{M}$: T (0,05) et $\bar{T}$ (0,95).

2. $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}7 \times 0{,}97 = 0{,}679$. **La probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif est** $0{,}679$**.**

3. M et $\bar{M}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales : $P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = 0{,}679 + 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}679 + 0{,}015 = 0{,}694$. $P(T) = 0{,}694$**.**

4. Valeur prédictive positive : $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}679}{0{,}694} \approx 0{,}978$. **La valeur prédictive positive du test est environ** $0{,}978$**.**

5. a) La valeur prédictive négative est la probabilité que le coyote ne soit pas malade sachant que son test est négatif : $P_{\bar{T}}(\bar{M}) = \dfrac{P(\bar{M} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \dfrac{0{,}3 \times 0{,}95}{1 - 0{,}694} = \dfrac{0{,}285}{0{,}306} \approx 0{,}931$. **La valeur prédictive négative est environ** $0{,}931$**.**

5. b) $0{,}978 > 0{,}931$: **un test positif est plus fiable qu'un test négatif**. Environ $2{,}2\,\%$ des tests positifs concernent des coyotes sains, alors qu'environ $6{,}9\,\%$ des tests négatifs concernent des coyotes malades (la maladie étant très répandue, les faux négatifs pèsent davantage).

Partie B

1. a) On répète 5 fois, de façon identique et indépendante (tirage avec remise), une épreuve de Bernoulli de succès « le test est positif », de probabilité $0{,}694$; X compte les succès. X **suit la loi binomiale** $\mathcal{B}(5 ; 0{,}694)$**.**

1. b) $P(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0{,}694 \times 0{,}306^4 \approx 0{,}03$. **La probabilité qu'un seul coyote ait un test positif est environ** $0{,}03$**.**

1. c) $P(X \geqslant 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 5 \times 0{,}694^4 \times 0{,}306 + 0{,}694^5 \approx 0{,}355 + 0{,}161 = 0{,}516 > 0{,}5$. **L'affirmation du vétérinaire est vraie.**

2. Pour n coyotes, la probabilité qu'aucun n'ait un test positif est $0{,}306^n$ (indépendance), donc la probabilité qu'au moins un soit positif est $1 - 0{,}306^n$. On résout : $1 - 0{,}306^n > 0{,}99 \iff 0{,}306^n < 0{,}01 \iff n \ln 0{,}306 < \ln 0{,}01 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}306} \approx 3{,}89$ (division par $\ln 0{,}306 < 0$). **Il faut capturer au moins** 4 **coyotes.**

Exercice 2 – QCM : lecture graphique de la dérivée et limites de suites *(7 pts)*

Sur la figure, f' est positive avant $-\dfrac{1}{2}$, s'annule en $-\dfrac{1}{2}$ en changeant de signe (positive puis négative) et admet un maximum en $-\dfrac{3}{2}$.

Question 1 : réponse b. f' s'annule en changeant de signe (de $+$ à $-$) en $-\dfrac{1}{2}$: f est croissante puis décroissante, elle admet un maximum en $-\dfrac{1}{2}$. (En $-\dfrac{3}{2}$, f' est maximale mais non nulle ; en -1, $f'(-1) \neq 0$.)

Question 2 : réponse a. f est convexe là où f' est croissante, c'est-à-dire sur $\left]-\infty ; -\dfrac{3}{2}\right[$; elle est concave après $-\dfrac{3}{2}$ où f' décroît, et la courbe admet un point d'inflexion en $-\dfrac{3}{2}$.

Question 3 : réponse c. f'' est la dérivée de f' ; f' admet un maximum en $-\dfrac{3}{2}$, donc $f''\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 0$. (Sur $[-2 ; -1]$, f' est croissante puis décroissante, donc f'' change de signe : b est fausse.)

Question 4 : réponse b. Si (u_n) est croissante, alors pour tout n, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n$: (v_n) est minorée par u_0. Les limites de (u_n) et (w_n) étant différentes, le théorème des gendarmes ne s'applique pas : on ne peut affirmer ni la convergence ni la divergence de (v_n) (exemple $v_n = 2 + (-1)^n$ diverge, $v_n = 2$ converge) ; et $1 \leqslant v_0 \leqslant 3$ n'est pas garanti (seules les limites sont connues).

Question 5 : réponse b. (u_n) est croissante ($u_n \leqslant u_{n+1}$) et majorée par 1 (car $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$) : elle converge (théorème de convergence monotone). Sa limite est inférieure ou égale à 0 mais pas nécessairement nulle (exemple : $u_n = -1 - \dfrac{1}{n}$).

Question 6 : réponse b. Pour tout n, $u_{n+1} > n + 1 > u_n$, donc (u_n) est croissante. Elle n'est jamais entière (inégalités strictes), et comme $u_n > n$, elle tend vers $+\infty$: elle diverge, mais elle a une limite (infinie).

Exercice 3 – Géométrie dans l'espace : cube et volume d'un tétraèdre *(7 pts)*

1. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$: $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$ et, K étant le milieu de $[BC]$ avec $B(1;0;0)$ et $C(1;1;0)$, $K\left(1;\frac{1}{2};0\right)$.

2. $\overrightarrow{EG}(1;1;0)$ et $\overrightarrow{EK}\left(1;\frac{1}{2};-1\right)$ sont non colinéaires. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{EG} = 2-2+0 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{EK} = 2-1-1 = 0$. $\vec{n}$ **est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGK) : il est orthogonal (normal) à ce plan.**

3. (EGK) a une équation de la forme $2x-2y+z+k=0$; avec $E(0;0;1)$: $1+k=0$, $k=-1$. (EGK) **:** $2x-2y+z-1=0$**.** (Contrôle : G : $2-2+1-1=0$; K : $2-1+0-1=0$.)

4. (d) passe par $F(1;0;1)$ et est dirigée par $\vec{n}$: $x=1+2t$**,** $y=-2t$**,** $z=1+t$**,** $t\in\mathbb{R}$**.**

5. L est le point de (d) situé dans le plan : $2(1+2t)-2(-2t)+(1+t)-1=0$, soit $9t+2=0$, $t=-\frac{2}{9}$. D'où $L\left(1-\frac{4}{9};\frac{4}{9};1-\frac{2}{9}\right)$, soit $L\left(\frac{5}{9};\frac{4}{9};\frac{7}{9}\right)$.

6. $\overrightarrow{LF} = -t\vec{n} = \frac{2}{9}\vec{n}$, donc $LF = \frac{2}{9}\|\vec{n}\| = \frac{2}{9}\sqrt{4+4+1} = \frac{2}{9}\times 3$. $LF = \frac{2}{3}$**.**

7. $\overrightarrow{FE}(-1;0;0)$ et $\overrightarrow{FG}(0;1;0)$ sont orthogonaux et de norme 1 : le triangle EFG est rectangle isocèle en F, d'aire $\frac{1}{2}\times 1\times 1 = \frac{1}{2}$. Le plan (EFG) est le plan $z=1$ (face supérieure du cube) et la hauteur issue de K est la distance de K à ce plan, soit $1-0=1$. $V_{EFGK} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{6}$**.**

8. En prenant EGK pour base, la hauteur issue de F est $LF = \frac{2}{3}$ (L projeté orthogonal de F sur (EGK)). $\frac{1}{6} = \frac{1}{3}\times \text{Aire}(EGK)\times\frac{2}{3}$ donne $\text{Aire}(EGK) = \frac{1}{6}\times\frac{9}{2}$. **L'aire du triangle EGK est $\frac{3}{4}$.**

9. L, M, N (milieux des côtés de EGK) sont dans le plan (EGK) et le triangle LMN est le triangle des milieux de EGK : ses côtés sont deux fois plus petits, donc son aire vaut $\frac{1}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{3}{16}$. La hauteur issue de F est toujours la distance de F au plan (EGK), soit $\frac{2}{3}$. $V_{FLMN} = \frac{1}{3}\times\frac{3}{16}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{24}$**.**

Exercice 4 – Étude de deux fonctions modélisant la trajectoire d'une balle de golf *(7 pts)*

Partie A

1. a) Pour $x > 0$, $f(x) = 0{,}06x^2\left(-1 + \dfrac{13{,}7}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{13{,}7}{x}\right) = -1$, donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

1. b) $f'(x) = 0{,}06(-2x + 13{,}7)$, du signe de $-2x + 13{,}7$: positif pour $x < 6{,}85$, négatif pour $x > 6{,}85$. **f est croissante sur $[0;6{,}85]$ et décroissante sur $[6{,}85;+\infty[$.**

1. c) $f(x) = 0 \iff 0{,}06x(-x+13{,}7) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 13{,}7$. **Les solutions sont 0 et $13{,}7$.**

2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-0{,}15x + 2{,}2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{0{,}2x} = +\infty$; par produit le premier terme tend vers $-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

2. b) $g'(x) = -0{,}15e^{0{,}2x} + (-0{,}15x + 2{,}2)\times 0{,}2e^{0{,}2x} = (-0{,}15 - 0{,}03x + 0{,}44)e^{0{,}2x}$. $g'(x) = (-0{,}03x + 0{,}29)e^{0{,}2x}$**.**

2. c) $e^{0{,}2x} > 0$, donc $g'(x)$ a le signe de $-0{,}03x + 0{,}29$: positif pour $x < \dfrac{0{,}29}{0{,}03} = \dfrac{29}{3} \approx 9{,}67$, négatif après. **$g$ est croissante sur $\left[0;\dfrac{29}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{29}{3};+\infty\right[$**, avec $g(0) = 2{,}2 - 2{,}2 = 0$, $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$ et un maximum $g\left(\dfrac{29}{3}\right) = 0{,}75e^{29/15} - 2{,}2 \approx 2{,}98$.

x	0		$\dfrac{29}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	croissante	$\approx 2{,}98$	décroissante	$-\infty$

2. d) Sur $\left[0;\dfrac{29}{3}\right]$, g est strictement croissante et $g(0) = 0$, donc $g(x) > 0$ pour $00vers-\infty$: *d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, g(x)=0$ y admet une unique solution.
L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle ; $g(13{,}72) \approx 0{,}008 > 0$ et $g(13{,}73) \approx -0{,}011 < 0$, donc **elle vaut environ** $13{,}72$.

Partie B

1. a) La hauteur maximale est $f(6{,}85) = 0{,}06 \times (-6{,}85^2 + 13{,}7 \times 6{,}85) = 0{,}06 \times 46{,}9225 \approx 2{,}815$ dizaines de yards. **Hauteur maximale : environ $28{,}2$ yards.**

1. b) $f'(0) = 0{,}06 \times 13{,}7 = 0{,}822$. **Vérifié.**

1. c) $\tan d = 0{,}822$ donc $d = \arctan(0{,}822) \approx 39{,}4°$. **Angle de décollage : environ $39{,}4°$.**

1. d) C_f est une parabole, **symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 6{,}85$** (axe passant par le sommet). Les tangentes aux points d'abscisses 0 et $13{,}7$, symétriques, ont des coefficients directeurs opposés ($f'(13{,}7) = -0{,}822$) : les angles de décollage et d'atterrissage sont égaux.

2. a) Le maximum de g est $g\left(\dfrac{29}{3}\right) \approx 2{,}98$ dizaines de yards. **Hauteur maximale : environ $29{,}8$ yards.**

2. b) $\tan d = g'(0) = 0{,}29$ donc $d \approx 16{,}2°$. **Angle de décollage : environ $16{,}2°$.**

2. c) $\tan a = -g'(13{,}7) \approx 1{,}87$ donc $a = \arctan(1{,}87) \approx 61{,}9°$. **L'angle d'atterrissage vaut environ** $62°$ **(arrondi à l'unité).**

Partie C

Les observations donnent un angle d'atterrissage ($52°$) nettement plus grand que l'angle de décollage ($24°$) : la trajectoire réelle est dissymétrique. Le modèle f (parabole) impose des angles égaux ($39{,}4°$ chacun) et ne peut pas rendre compte de cette dissymétrie ; le modèle g donne un décollage ($16{,}2°$) plus faible que l'atterrissage ($62°$), une hauteur maximale (29,8 yards) proche des 32 yards observés et la même distance au point de chute (137 yards). **Le modèle g semble le plus adapté**, même s'il sous-estime l'angle de décollage et surestime l'angle d'atterrissage.

Conseils pour le jour J

Sujet à trois exercices au choix parmi quatre, tous corrigés ici. Exercice 1 : les « valeurs prédictives » sont des probabilités conditionnelles à rebours ; écris leur définition avec la notation $P_T(M)$ avant de calculer, et pour la comparaison, une phrase d'interprétation est attendue. Exercice 2 : les questions 4 à 6 testent la précision des théorèmes sur les suites (gendarmes uniquement si les limites sont égales, convergence monotone) ; élimine les réponses par contre-exemple. Exercice 3 : c'est un enchaînement classique dans le cube ; la question 9 se traite sans calcul si l'on voit que LMN est le triangle des milieux (aire divisée par 4, même hauteur). Exercice 4 : long mais très guidé ; en A.2.d, sépare les deux intervalles de monotonie pour justifier l'unicité de la solution non nulle, et en partie C, appuie-toi sur la dissymétrie des angles observés.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).