Corrigé – Bac 2022 – spécialité mathématiques – Métropole, La Réunion, Antilles Guyane, jour 1

Fonction exponentielle et suite récurrente : dosage d'un médicament, Géométrie dans l'espace : projeté orthogonal et volume d'un tétraèdre, Probabilités conditionnelles et loi binomiale : stage de formation, QCM : fonctions, primitives et convexité

Corrigé détaillé rédigé par Ben, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Fonction exponentielle et suite récurrente : dosage d'un médicament *(7 pts)*

Partie A : premier protocole

1. a) $f = 3uv$ avec $u(t) = t$, $u'(t) = 1$, $v(t) = e^{-0{,}5t+1}$, $v'(t) = -0{,}5e^{-0{,}5t+1}$. Donc $f'(t) = 3\left(e^{-0{,}5t+1} - 0{,}5te^{-0{,}5t+1}\right)$. $f'(t) = 3(-0{,}5t+1)e^{-0{,}5t+1}$**.**

1. b) $e^{-0{,}5t+1} > 0$, donc $f'(t)$ a le signe de $-0{,}5t+1$: positif pour $t < 2$, nul en 2, négatif pour $t > 2$. f **est croissante sur** $[0;2]$ **et décroissante sur** $[2;10]$, avec $f(0) = 0$, $f(2) = 6e^0 = 6$ et $f(10) = 30e^{-4} \approx 0{,}55$.

t	0		2		10
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	0	croissante	6	décroissante	$30e^{-4}$

1. c) La quantité de médicament est maximale au bout de 2 **heures et vaut alors** 6 **mg.**

2. a) Sur $[0;2]$, f est continue et strictement croissante, avec $f(0) = 0$ et $f(2) = 6$; comme $0 \leqslant 5 \leqslant 6$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure que **l'équation** $f(t) = 5$ **admet une unique solution** α **sur** $[0;2]$. À la calculatrice, $f(1{,}02) \approx 4{,}995 < 5$ et $f(1{,}03) \approx 5{,}019 > 5$, donc $\alpha \approx 1{,}02$.

2. b) D'après les variations de f, $f(t) \geqslant 5$ si et seulement si $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. La durée d'efficacité est $\beta - \alpha \approx 3{,}46 - 1{,}02 = 2{,}44$ h, soit 2 h et $0{,}44 \times 60 \approx 26$ min. **Le médicament est efficace pendant environ** 2 **h** 26 **min.**

Partie B : deuxième protocole

1. Une heure après l'injection initiale, il reste 70 % de 2 mg, soit 1,4 mg, puis on injecte 1,8 mg : $u_1 = 0{,}7 \times 2 + 1{,}8 = 3{,}2$ **mg.**

2. Entre deux injections, la quantité diminue de 30 % (multiplication par 0,7), puis on ajoute 1,8 mg. **Pour tout** n**,** $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8$**.**

3. a) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$ ». *Initialisation* : $u_0 = 2 \leqslant u_1 = 3{,}2 < 6$. *Hérédité* : si $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$, alors, la fonction $x \mapsto 0{,}7x + 1{,}8$ étant croissante, $0{,}7u_n + 1{,}8 \leqslant 0{,}7u_{n+1} + 1{,}8 < 0{,}7 \times 6 + 1{,}8$, soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$. *Conclusion* : **pour tout** n**,** $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$**.**

3. b) La suite est croissante et majorée par 6 : d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) **converge**.

3. c) Par continuité de $x \mapsto 0{,}7x + 1{,}8$, $\ell = 0{,}7\ell + 1{,}8$, soit $0{,}3\ell = 1{,}8$, $\ell = 6$: avec ce protocole, la quantité de médicament dans le sang juste après une injection se rapproche de 6 mg sans jamais l'atteindre.

4. a) $v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - 0{,}7u_n - 1{,}8 = 4{,}2 - 0{,}7u_n = 0{,}7(6 - u_n) = 0{,}7v_n$. (v_n) **est géométrique de raison** 0,7 **et de premier terme** $v_0 = 6 - 2 = 4$**.**

4. b) $v_n = 4 \times 0{,}7^n$ **et** $u_n = 6 - v_n = 6 - 4 \times 0{,}7^n$**.**

4. c) $u_n \geqslant 5{,}5 \iff 4 \times 0{,}7^n \leqslant 0{,}5 \iff 0{,}7^n \leqslant 0{,}125 \iff n \ln 0{,}7 \leqslant \ln 0{,}125 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}125}{\ln 0{,}7} \approx 5{,}83$ (division par $\ln 0{,}7 < 0$). Le premier rang est $n = 6$ ($u_5 \approx 5{,}33$ et $u_6 \approx 5{,}53$). La quantité atteint 5,5 mg juste après l'injection de la sixième heure ; on arrête alors. **Il y a donc 7 injections : l'injection initiale et les six injections horaires.**

Exercice 2 – Géométrie dans l'espace : projeté orthogonal et volume d'un tétraèdre *(7 pts)*

1. a) $\vec{u}(2; -1; 2)$ (coefficients de t).

1. b) Pour $t = -1$: $x = 1 - 2 = -1$, $y = 2 + 1 = 3$, $z = 2 - 2 = 0$. $B(-1; 3; 0) \in \mathcal{D}$**.**

1. c) $\overrightarrow{AB}(0; 2; -3)$. $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 - 2 - 6 = -8$**.**

2. a) $\mathcal{P}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$, donc $\vec{u}$ est normal à $\mathcal{P}$: $2x - y + 2z + k = 0$. Avec $A(-1; 1; 3)$: $-2 - 1 + 6 + k = 0$, $k = -3$. $\mathcal{P}$ **:** $2x - y + 2z - 3 = 0$**.**

2. b) H est le point de $\mathcal{D}$ vérifiant l'équation de $\mathcal{P}$: $2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0$, soit $9t + 1 = 0$, $t = -\dfrac{1}{9}$. D'où $H\left(1 - \dfrac{2}{9}; 2 + \dfrac{1}{9}; 2 - \dfrac{2}{9}\right)$, soit $H\left(\dfrac{7}{9}; \dfrac{19}{9}; \dfrac{16}{9}\right)$.

2. c) $\overrightarrow{AH}\left(\dfrac{16}{9}; \dfrac{10}{9}; -\dfrac{11}{9}\right)$, $AH^2 = \dfrac{256 + 100 + 121}{81} = \dfrac{477}{81} = \dfrac{53}{9}$. $AH = \dfrac{\sqrt{53}}{3}$**.**

3. a) H et B sont deux points de la droite $\mathcal{D}$, donc $\overrightarrow{HB}$ est colinéaire à son vecteur directeur $\vec{u}$: **il existe un réel** k **tel que** $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$**.**

3. b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} + k\,\vec{u} \cdot \vec{u}$. Or $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ car H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$ (la droite (AH) est orthogonale à $\mathcal{D}$). Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = k\|\vec{u}\|^2$ et $k = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

3. c) $\|\vec{u}\|^2 = 4 + 1 + 4 = 9$ donc $k = -\dfrac{8}{9}$. $\overrightarrow{HB} = -\dfrac{8}{9}\vec{u} = \left(-\dfrac{16}{9}; \dfrac{8}{9}; -\dfrac{16}{9}\right)$, d'où $H = B - \overrightarrow{HB}$: $x_H = -1 + \dfrac{16}{9} = \dfrac{7}{9}$, $y_H = 3 - \dfrac{8}{9} = \dfrac{19}{9}$, $z_H = 0 + \dfrac{16}{9} = \dfrac{16}{9}$. **On retrouve** $H\left(\dfrac{7}{9}; \dfrac{19}{9}; \dfrac{16}{9}\right)$**.**

4. Les points A, C, H appartiennent au plan $\mathcal{P}$: on prend ACH pour base. La hauteur correspondante est la distance de B à $\mathcal{P}$, c'est-à-dire HB (car $(HB) = \mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$ et $H \in \mathcal{P}$) : $HB = |k|\,\|\vec{u}\| = \dfrac{8}{9} \times 3 = \dfrac{8}{3}$. Alors $V = \dfrac{1}{3} \times \text{Aire}(ACH) \times \dfrac{8}{3} = \dfrac{8}{9}$ donne $\text{Aire}(ACH) = \dfrac{8}{9} \times 3 \times \dfrac{3}{8}$. **L'aire du triangle** ACH **est** 1**.**

Exercice 3 – Probabilités conditionnelles et loi binomiale : stage de formation *(7 pts)*

1. a) $P(S) = 0{,}25$**.**

1. b) Arbre : $P(F) = 0{,}52$, $P(\bar{F}) = 0{,}48$; après F : $P_F(S) = 0{,}4$ et $P_F(\bar{S}) = 0{,}6$ (les branches issues de $\bar{F}$ sont déterminées à la question e : 0,0875 et 0,9125).

1. c) $P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S) = 0{,}52 \times 0{,}4 = 0{,}208$. **La probabilité que la personne soit une femme ayant suivi le stage est** $0{,}208$**.**

1. d) $P_S(F) = \dfrac{P(F \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}208}{0{,}25} = 0{,}832$. **Sachant que la personne a suivi le stage, la probabilité que ce soit une femme est** $0{,}832$**.**

1. e) F et $\bar{F}$ forment une partition : $P(\bar{F} \cap S) = P(S) - P(F \cap S) = 0{,}25 - 0{,}208 = 0{,}042$. Donc $P_{\bar{F}}(S) = \dfrac{0{,}042}{0{,}48} = 0{,}0875 < 0{,}1$. **Parmi les hommes,** $8{,}75\,\%$ **ont suivi le stage, soit moins de** $10\,\%$ **: le directeur a raison.**

2. a) On répète 20 fois de façon identique et indépendante (tirage avec remise) une épreuve de Bernoulli de succès « le salarié a suivi le stage », de probabilité $0{,}25$; X compte les succès. X **suit la loi binomiale** $\mathcal{B}(20 ; 0{,}25)$**.**

2. b) $P(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0{,}25^5 \times 0{,}75^{15} \approx 0{,}202$. $P(X = 5) \approx 0{,}202$**.**

2. c) La boucle ajoute $P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 5)$: le programme renvoie $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}617$. **proba(5)** $\approx 0{,}617$: c'est la probabilité qu'au plus 5 salariés de l'échantillon aient suivi le stage.

2. d) $P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 5) \approx 1 - 0{,}617 = 0{,}383$. $P(X \geqslant 6) \approx 0{,}383$**.**

3. $25\,\%$ des salariés sont augmentés de $5\,\%$ et $75\,\%$ de $2\,\%$. Le pourcentage moyen d'augmentation est la moyenne pondérée $0{,}25 \times 5 + 0{,}75 \times 2 = 1{,}25 + 1{,}5 = 2{,}75$. **Le pourcentage moyen d'augmentation est** $2{,}75\,\%$**.**

Exercice 4 – QCM : fonctions, primitives et convexité *(7 pts)*

1. Réponse c. Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x^2\left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$, donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -2$: la droite $y = -2$ est asymptote horizontale.

2. Réponse d. $f(x) = xe^{x^2} = \dfrac{1}{2} \times 2x\, e^{x^2}$ est de la forme $\dfrac{1}{2}u'e^u$ avec $u(x) = x^2$: les primitives sont $\dfrac{1}{2}e^{x^2} + C$. $F(0) = 1$ donne $\dfrac{1}{2} + C = 1$, $C = \dfrac{1}{2}$.

3. Réponse c. f est convexe sur un intervalle où f' est croissante. Sur la figure, $\mathcal{C}_{f'}$ monte (elle coupe l'axe des abscisses en 2) jusqu'à un maximum atteint vers $x = 4$, puis redescend lentement vers 0 : f' est croissante sur $[0 ; 2]$, donc f **est convexe sur** $[0 ; 2]$. La réponse d est fausse (après son maximum, f' décroît : f y est concave), et donc a et b aussi.

4. Réponse a. Toute primitive F de f vérifie $F'(x) = f(x) = 3e^{-x^2} + 2 > 0$ pour tout réel x : toutes les primitives sont croissantes sur $\mathbb{R}$.

5. Réponse d. on met x^2 en facteur au dénominateur : $\dfrac{2\ln x}{3x^2 + 1} = \dfrac{2\ln x}{x^2\left(3 + \frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{\ln x}{x^2} \times \dfrac{2}{3 + \frac{1}{x^2}}$; par croissances comparées $\dfrac{\ln x}{x^2} \to 0$ et le second facteur tend vers $\dfrac{2}{3}$: la limite est 0.

6. Réponse c. En posant $X = e^x > 0$: $X^2 + X - 12 = 0$, de discriminant 49, a pour solutions $X = 3$ et $X = -4$. Seule $X = 3$ est strictement positive, d'où l'unique solution $x = \ln 3$.

Conseils pour le jour J

Sujet à trois exercices au choix parmi quatre, tous corrigés ici. Exercice 1 : en A.2.b, convertis la durée en heures et minutes ($0{,}44$ h ≈ 26 min) comme demandé ; en B.4.c, la question porte sur le nombre d'injections, pas sur le rang n : n'oublie pas l'injection initiale. Exercice 2 : la question 3 propose une seconde méthode

(projection avec $k = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$), la rédaction attend la décomposition $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$ et l'argument $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$. Pour la question 4, identifie que A, C, H sont dans $\mathcal{P}$ et que la hauteur est HB. Exercice 3 : la question 1.e demande de calculer $P_{\bar{F}}(S)$ à partir de $P(\bar{F} \cap S) = P(S) - P(F \cap S)$; pour le programme Python, décris ce que fait la boucle avant de donner la valeur. Exercice 4 : le QCM se traite en 25 minutes ; les questions 1, 5 et 6 sont des techniques de base (factorisation du terme dominant, croissances comparées, changement de variable $X = e^x$ avec $X > 0$). À la question 3, la courbe donnée est celle de f', pas de f : f est convexe là où cette courbe monte.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).